アソシエーションスキームのブロック

花木章秀　信州大学理学部

仙台国際センター・2004 年 8 月 5 日

1　はじめに

アソシエーションスキームとは、代数的組合せ論において他の多くのものと深く関係する、基本的かつ重要な研究対象である。またそれは、ある意味で、有限群の概念の拡張ともいえる。この講演では有限群の表現論を一般化してアソシエーションスキームの表現論を考える。

アソシエーションスキームからは自然に隣接代数と呼ばれる代数が定義される。隣接代数が可換であるときにアソシエーションスキームは可換といわれる。有限群から自然な方法で構成されるアソシエーションスキームには thin scheme (Example 2.1) と群アソシエーションスキーム (Example 2.2) がある。この場合、その隣接代数はそれぞれ群代数、群代数の中心となっている。よって群アソシエーションスキームは可換である。これまでの研究では有限群の表現を一般化するのに thin scheme (群代数) を考えることが多かったように思う。ここでは有限群の表現から得られる群アソシエーションスキームの表現の性質を一般の可換アソシエーションスキームに一般化することを考える。可換アソシエーションスキームは応用上特に重要なものであるが、私個人の興味は、むしろ非可換なものにある。非可換な場合に関する考察も若干ではあるが加えてある。

隣接代数は群代数と同じように単位元をもつ任意の可換環上で定義される。複素数体 $\mathbb{C}$ (標数 0 の体) 上の隣接代数は半単純であることが知られている。正標数の体上の隣接代数は半単純とは限らない。有限群と同じように、標数 0 の体上の表現を**通常表現**と呼び、正標数の体上の表現を**モジュラー表現**と呼ぶ。正標数の体上でも隣接代数は半単純となる場合があるが、ここではそれもモジュラー表現と呼ぶことにする。可換アソシエーションスキームの通常表現はよく研究されているが、非可換の場合はまだあまり研究されていない。またモジュラー表現は可換の場合に限ってもあまり研究されておらず、一般論は何も分かっていないと言ってよい。アソシエーションスキームのモジュラー表現の一般論の構築が目標である。

アソシエーションスキームのモジュラー表現に関する論文、および関係する論文としては [1], [2], [3], [4], [5], [8], [9], [11], [12], [13], [14] などがある。もちろん有限群のモジュラー表現や有限可移置換群から得られる Hecke 環のモジュラー表現

なども関連する結果といえるが、それらはここに書ききれないぐらいたくさんある。しかしアソシエーションスキームのモジュラー表現に関しては、今のところ本質的には**何も分かっていない**というのが私の思うところである。

有限群のモジュラー表現をアソシエーションスキームに拡張しようとしたときに扱いやすい点としては

- p-モジュラー系を利用できる。
- 分解行列、Cartan 行列など定義できる。(Cartan 行列は対称行列である。)

がある。逆に扱いにくい点としては

- 共役類に相当するよい概念がない。
- 分解体が分からない。
- Brauer 指標に相当するものが定義できない。
- シロー部分群など p-部分群に相当するものがない。
- 隣接代数は対称代数ではない。
- 具体例があまり計算されていない。

などがある。扱いにくい点の方が多く、なかなか研究が進んでいないというのが現状である。

モジュラー表現の一般論を考えるためには、よい道具が必要と考える。有限群のモジュラー表現ではブロックの理論が重要であり、ブロックの理論では不足群が重要な役割を果たしている。アソシエーションスキームに関して同様のことを考えようとしてもシロー部分群も定義できない状況ではどうにもならない。しかし不足数 (不足群の位数で決まる数) に相当するものは考えられるのではないだろうか。このように考え、3 節で二つの不変数を定義する。群アソシエーションスキームの場合にはこの数は不足数とほぼ同じ情報をもっているが、一般の可換アソシエーションスキームに対して、どのように不足数を定義するのがよいかは分かっていない。

2 準備

ここではアソシエーションスキームとその隣接代数の定義をし、またモジュラー表現に関する基本的なことをまとめておく。詳しくは、アソシエーションスキームに関しては [15]、モジュラー表現に関しては [10] を参照して頂きたい。

X を有限集合とし、G を $X \times X$ の分割とする。すなわち G の要素は $X \times X$ の空でない部分集合で

$$X \times X = \bigcup_{g \in G} g, \qquad g \neq h \Longrightarrow g \cap h = \phi$$

であるものとする。$g \subset X \times X$ に対して以下のように隣接行列を定義する。g の**隣接行列** σ_g は、行、列共に集合 X で添字の付けられた有理整数を成分とする行列で、その (x,y)-成分は $(x,y) \in g$ のとき 1 で、そうでないときには 0 と定められたものである。

(X,G) が次の条件を満たすとき**アソシエーションスキーム**という。

(1) $1 := \{(x,x) \mid x \in X\} \in G$.

(2) $g \in G$ ならば $g^* := \{(y,x) \mid (x,y) \in g\} \in G$.

(3) $\sigma_f \sigma_g = \sum_{h \in G} p_{fg}^h \sigma_h$ となる p_{fg}^h が存在する。

定義から隣接行列 σ_g は各行、各列に $n_g := p_{gg^*}^1$ 個の 1 を含む。これを g の **valency** という。$S \subset G$ に対して $n_S := \sum_{g \in S} n_g$ とおく。特に $n_G = |X|$ であり、これを (X,G) の**位数**という。

アソシエーションスキームの定義の条件 (3) より、自然に $\mathbb{Z}$ 上の代数

$$\mathbb{Z}G := \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z}\sigma_g$$

が定義でき、係数環を変更して、任意の (単位元を持つ) 可換環 $\mathcal{O}$ 上で

$$\mathcal{O}G := \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}$$

が定義できる。これを (X,G) の $\mathcal{O}$ 上の**隣接代数**と呼ぶ。隣接行列 σ_g は有理整数を成分とする行列であるが、特に紛らわしくない場合には、簡単のため別の係数環で考える場合にも同じ記号を用いる。

Example 2.1. Θ を有限群とする。$\theta \in \Theta$ に対して $\widetilde{\theta} := \{(x,y) \in \Theta \times \Theta \mid x\theta = y\}$, $\widetilde{\Theta} := \{\widetilde{\theta} \mid \theta \in \Theta\}$ とおく。このとき $(\Theta, \widetilde{\Theta})$ はアソシエーションスキームとなる。またこのアソシエーションスキームの隣接代数は自然に群代数と同型になる。

このように定義したアソシエーションスキームに対しては、すべての valency が 1 になる。逆にすべての valency が 1 であるアソシエーションスキームはこのようにして得られる。これを **thin scheme** という。

Example 2.2. Θ を有限群とし $C_0 := \{1\}, C_1, \cdots, C_d$ をその共役類とする。$\widehat{C_i} := \{(x,y) \in \Theta \times \Theta \mid x^{-1}y \in C_i\}$, $\widehat{\Theta} := \{\widehat{C_i} \mid i = 0,1,\cdots,d\}$ とおく。このとき $(\Theta, \widehat{\Theta})$ はアソシエーションスキームとなる。これを Θ の**群アソシエーションスキーム**という。群アソシエーションスキームの隣接代数は自然に群代数の中心と同型になる。

アソシエーションスキームの**表現**とは隣接代数の線形表現、すなわち隣接代数からある次数の全行列環への代数準同型である。特に標数 0 の体上の表現を**通常表現**といい、正標数の体上での表現を**モジュラー表現**という。また表現のトレースを**指標**という。$\mathcal{O}G$ の既約指標全体の集合を $\mathrm{Irr}(\mathcal{O}G)$ と書く。特に係数環とし

て複素数体 $\mathbb{C}$ を考えたとき $\mathrm{Irr}(\mathbb{C}G)$ を単に $\mathrm{Irr}(G)$ と書く。複素数体上の隣接代数 $\mathbb{C}G$ は半単純であることが知られている [15, Theorem 4.1.3 (ii)]。

$M_X(\mathcal{O})$ を行、列共に有限集合 X で添字の付けられた $\mathcal{O}$ 上の全行列環とする。$\Gamma_{\mathcal{O}} : \mathcal{O}G \to M_X(\mathcal{O})$ を $\sigma_g \mapsto \sigma_g$ で定めればこれは表現になる。これを**標準表現**と呼ぶ。標準表現に対応する右 $\mathcal{O}G$-加群を **(右) 標準加群**という。加群は常に右加群を表すこととし、今後特に断らない。標準加群の自然な基底として集合 X を取ることができるので、これを $\mathcal{O}X$ と表す。標準表現の指標を $\gamma_{\mathcal{O}}$ と書いて**標準指標**と呼ぶ。明らかに $\gamma_{\mathcal{O}}(\sigma_1) = n_G,\ \gamma_{\mathcal{O}}(\sigma_g) = 0\ (g \neq 1)$ である。複素数体上の標準指標 $\gamma_{\mathbb{C}}$ の既約分解

$$\gamma_{\mathbb{C}} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} m_\chi \chi$$

を考え、このときの各既約成分 χ の重複度 m_χ を単に χ の**重複度**といい、常に m_χ という記号で表す。

$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して $\mathbb{C}G$ の中心的原始べき等元 e_χ が存在する。e_χ は次の式で与えられることが知られている [15, Lemma 4.1.4 (ii)]。

$$e_\chi = \frac{m_\chi}{n_G} \sum_{g \in G} \frac{1}{n_g} \chi(\sigma_{g^*}) \sigma_g$$

行は $\mathrm{Irr}(G)$ で、列は G で添字付けられた行列 $(\chi(\sigma_g))$ を G の**指標表**という。Example 2.1 のように定義したアソシエーションスキーム $(\Theta, \widetilde{\Theta})$ の指標表は群 Θ の指標表と一致する。ただし、有限群の指標表の列は群の元で添字付けるわけではなく、その値が一致するため共役類で添字付ける。アソシエーションスキームの場合は共役類に相当する適当な概念がないため G の元すべてを書き並べるのである。

p を素数とし、以後固定する。(K, R, F) を **p-モジュラー系**とする。すなわち R は完備離散付値環で、極大イデアル (π) をもち、K は R 商体でその標数は 0、F は剰余体 $R/(\pi)$ でその標数は p である。また K と F は十分に大きく、ここで考えるすべての代数の分解体であるものと仮定する。ν を K の付値で $\nu(p) = 1$ を満たすものとする。

$$\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b), \quad \nu(a+b) \geq \min(\nu(a), \nu(b)), \quad \nu(0) = \infty$$

であり、有理整数 $n = p^e m,\ p \nmid m$ に対しては $\nu(n) = e$ である。$R \subset K$ と見れば

$$R = \{a \in K \mid \nu(a) \geq 0\}$$

であることにも注意しておく。この設定は有限群のモジュラー表現でよく使われるものであり、詳しくは [10] を参照して頂きたい。慣れていない場合は $(K, R, F) = (\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p, GF(p))$ と思っても差し支えない (このように仮定すると考える代数の分解体にならないが、この話では本質的ではない)。隣接代数 KG は本質的に $\mathbb{C}G$

と同じと考えてよく、それは半単純である。また $\mathrm{Irr}(KG)$ を $\mathrm{Irr}(G) = \mathrm{Irr}(\mathbb{C}G)$ と同一視する。自然な準同型 $R \to F = R/(\pi)$ による $r \in R$ の像を r^* と書く。$RG \to FG = RG/\pi RG$ による $a \in RG$ の像も同じように a^* と書くことにする。有限群の表現と同じように以下のようにブロックを定義することができる。

(X, G) をアソシエーションスキームとする。以下の集合の間には自然な全単射がある。

(1) RG の中心的原始べき等元全体の集合：$\{e_B\}$

(2) FG の中心的原始べき等元全体の集合：$\{{e_B}^*\}$

(3) RG の両側イデアルとしての直既約成分全体の集合：$\{B = e_B RG\}$

(4) FG の両側イデアルとしての直既約成分全体の集合：$\{B^* = {e_B}^* FG\}$

RG の両側イデアルとしての直既約成分 B を (X, G) の**ブロック**といい、e_B を**ブロックべき等元**という。B, B^* はそれぞれ e_B, ${e_B}^*$ を単位元とする代数である。G のブロック全体を $\mathrm{Bl}(G)$ と書く。また $B^K := e_B KG$ とする。

$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ は $\chi(e_B) \neq 0$ であるとき B **に属する**といわれる。任意の既約指標は唯一つのブロックに属する。$\mathrm{Irr}(B) := \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \mid \chi(e_B) \neq 0\}$ とおけば

$$\mathrm{Irr}(G) = \bigcup_{B \in \mathrm{Bl}(G)} \mathrm{Irr}(B)$$

である。$\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ に対して $\chi(e_B) = \chi(1),\ \chi(e_{B'}) = 0\ (B' \neq B)$ である。e_B は KG の元と見ても中心的べき等元なので、中心的原始べき等元分解があるが、それは

$$e_B = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} e_\chi$$

となっている。

$\sigma_g \mapsto n_g$ は G の 1 次の既約表現 (指標) である。これを G の**自明な表現 (指標)** という。自明な指標を含むブロックを G の**主ブロック**といい $B_0(G)$ または B_0 と書く。

B^K の中心 $Z(B^K)$ の既約表現を考える。$\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ に対して $\omega_\chi : Z(B^K) \to K$ を

$$\omega_\chi(a) := \frac{\chi(a)}{\chi(1)}$$

で定めれば、これは $Z(B^K)$ の既約表現であり、$\{\omega_\chi \mid \chi \in \mathrm{Irr}(B)\}$ がその全体となる。ω_χ を $Z(B) = RG \cap Z(B^K)$ の表現と見ることもできる。これを F におとして考えて $Z(B)^*$ の既約表現 ${\omega_\chi}^*$ を得る。$Z(B)^*$ は可換かつ直既約なので局所環である。よって、その既約表現は唯一つである。したがって $\chi, \varphi \in \mathrm{Irr}(B)$ に対して ${\omega_\chi}^* = {\omega_\varphi}^*$ となる。${\omega_\chi}^*$ は χ の属するブロック B のみによって定まるので、これを ${\omega_B}^*$ と書くことにする。また $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$, $\varphi \in \mathrm{Irr}(B')$ $(B \neq B')$ とすると ${\omega_\chi}^*({e_B}^*) = 1,\ {\omega_\varphi}^*({e_B}^*) = 0$ より ${\omega_\chi}^* \neq {\omega_\varphi}^*$ である。このことから次の結果を得る。

Proposition 2.3. $\chi, \varphi \in \mathrm{Irr}(G)$ が同じブロックに属するためには、任意の $a \in Z(B)$ に対して ${\omega_\chi}^*(a^*) = {\omega_\varphi}^*(a^*)$ となることが必要十分条件である。

Remark. 一般に $Z(B)^* = Z(B^*)$ は成り立たず $Z(B)^* \subseteq Z(B^*)$ である。しかし $Z(B)^*$ と $Z(B^*)$ はどちらも局所環で、その既約表現は自然に対応している。

(X, G) が可換である場合は $\omega_\chi = \chi$ であるから Proposition 2.3 を次のように書き直すことができる。

Proposition 2.4. (X, G) は可換であるとする。$\chi, \varphi \in \mathrm{Irr}(G)$ が同じブロックに属するためには、任意の $g \in G$ に対して $\chi(\sigma_g)^* = \varphi(\sigma_g)^*$ となることが必要十分条件である。

3　いくつかの不変数

この節では $\underline{(X, G)\text{ を可換アソシエーションスキームと仮定}}$ し、G のブロックにいくつかの不変数を定義する。6 節の例を見ながら考えると理解しやすいと思う。

$B \in \mathrm{Bl}(G)$ とし B^* の唯一つの既約表現 ${\omega_B}^*$ を考える。

$$s(B) := \max\{\nu(n_g) \mid {\omega_B}^*({\sigma_g}^*) \neq 0\}$$

とおく。${\omega_B}^*(e_B^*) = 1$ なので ${\omega_B}^*({\sigma_g}^*) \neq 0$ となる $g \in G$ は存在し、よって $s(B)$ は矛盾なく定義できる。次は定義より明らかである。

Proposition 3.1. $s(B_0(G)) = 0$.

次にブロックべき等元 e_B を考える。

$$e_B = \sum_{g \in G} \beta_B(g) \sigma_g \quad (\beta_B(g) \in R)$$

と書く。このとき

$$s'(B) := \min\{\nu(n_g) \mid \beta_B(g)^* \neq 0\}$$

とおく。非負整数 ℓ に対して

$$I_\ell := \bigoplus_{\nu(n_g) \geq \ell} F{\sigma_g}^*$$

とおけば、I_ℓ は FG のイデアルになる [5]。これを用いると

$$s'(B) = \max\{\ell \mid {e_B}^* \in I_\ell\}$$

と書くことができる。次が成り立つ。

Theorem 3.2. $s(B) = s'(B)$.

Proof. まず $\nu(n_g) > s'(B)$ ならば ${\omega_B}^*({\sigma_g}^*) = 0$ であることを示す。これが言えれば $s(B) \le s'(B)$ が成り立つ。B^* は局所環なので、唯一つの極大イデアル、Jacobson 根基、をもつ。${e_B}^*{\sigma_g}^*$ は真のイデアル ${e_B}^* I_{s'(B)+1}$ に含まれるので B^* の Jacobson 根基に含まれる。Jacobson 根基は既約加群を零化するので $0 = {\omega_B}^*({e_B}^*{\sigma_g}^*) = {\omega_B}^*({\sigma_g}^*)$ が成り立つ。

次に ${\omega_B}^*(I_{s'(B)}) \ni {\omega_B}^*({e_B}^*) \neq 0$ となるので $s(B) \ge s'(B)$ である。 □

記号を簡単にするため

$$\begin{aligned}\mathrm{Bl}_\ell(G) &:= \{B \in \mathrm{Bl}(G) \mid s(B) = \ell\},\\ G_\ell &:= \{g \in G \mid \nu(n_g) = \ell\}\end{aligned}$$

とおく。Proposition 2.4 は次のように精密化される。

Proposition 3.3. $B, B' \in \mathrm{Bl}_\ell(G), \chi \in \mathrm{Irr}(B), \varphi \in \mathrm{Irr}(B')$ とする。$B = B'$ であるためには、任意の $g \in G_\ell$ に対して $\chi(\sigma_g)^* = \varphi(\sigma_g)^*$ となることが必要十分条件である。特に $\{({\omega_B}^* \mid_{G_\ell}) \mid B \in \mathrm{Bl}_\ell(G)\}$ は F 上一次独立であり、よって $|\mathrm{Bl}_\ell(G)| \le |G_\ell|$ が成り立つ。

Proof. $\{({\omega_B}^* \mid_{G_\ell}) \mid B \in \mathrm{Bl}_\ell(G)\}$ が F 上一次独立であることを示せば十分である。$\sum_{B \in \mathrm{Bl}_\ell(G)} \alpha_B({\omega_B}^* \mid_{G_\ell}) = 0$ と仮定する。$B \in \mathrm{Bl}_\ell(G)$ に対して、$\nu(n_g) > \ell$ ならば ${\omega_B}^*({\sigma_g}^*) = 0$ であり、$\nu(n_g) < \ell$ ならば $\beta_B(g)^* = 0$ である。よって任意の $B' \in \mathrm{Bl}_\ell(G)$ に対して、

$$0 = \sum_{B \in \mathrm{Bl}_\ell(G)} \alpha_B({\omega_B}^* \mid_{G_\ell})(\sum_{g \in G_\ell} \beta_{B'}(g)^* {\sigma_g}^*) = \sum_{B \in \mathrm{Bl}_\ell(G)} \alpha_B {\omega_B}^*({e_{B'}}^*) = \alpha_{B'}$$

である。 □

標準加群 FX を用いてもう一つの不変数を定義する。$B \in \mathrm{Bl}(G)$ に対して

$$\dim_F FX{e_B}^* = \mathrm{rank}_R RXe_B = \dim_K KXe_B = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} m_\chi \chi(1)$$

であり、この値は $e_B, {e_B}^*$ の行列としてのランクに等しい。(可換性を仮定しているので $\chi(1) = 1$ であるが、この部分の議論は非可換の場合にも成り立つので $\chi(1)$ を省略せずに書いておく。) この値について次が成り立つ。

Proposition 3.4. $\nu(\dim_F FX{e_B}^*) \ge \nu(n_G)$.

Proof. $\beta_B(1) = \left(\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} m_\chi \chi(1)\right) / n_G$ であり、これは R の元である。 □

Remark. より一般的な結果が [7] にある。

これにより

$$t(B) := \nu(\dim_F FXe_B{}^*) - \nu(n_G)$$

とおけば $t(B) \geq 0$ である。$t(B) = s(B)$ であることを期待したが、そうでない例はたくさんある。特に主ブロック B_0 に対しても $t(B_0) > 0$ となる例がある。多くの例から次の問題が生じる。

Problem 3.5. $s(B) \leq t(B)$ は正しいか？

この問題は更に次の問題に一般化される。

Problem 3.6. $\nu(\beta_B(g)) \geq s(B) - \nu(n_g)$ は正しいか？

もし Problem 3.6 が正しければ $g = 1$ に適用して

$$t(B) = \nu(\beta_B(1)) \geq s(B) - \nu(n_1) = s(B)$$

となり Problem 3.5 も正しい。

Example 3.7. 次の場合には Problem 3.6 は正しい。

- 群アソシエーションスキーム (Example 2.2)
- Johnson scheme $G = J(v,k)$, $1 \leq v \leq 40$, FG は半単純でない場合 (計算機による確認)

この節の最後に簡単で特殊な場合にしか適用できないが、有用であると思われる一つの応用例を紹介する。隣接代数が半単純であってもモジュラー表現が役に立つ例にもなっている。

Example 3.8. (X, G) を FG が半単純である可換アソシエーションスキームとする。すなわち $p \nmid n_G$ かつ $\sum_{g\in G} \nu(n_g) = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \nu(m_\chi)$ であるものとする ([2], [4])。($p \nmid n_G$ のとき、一般に $\sum_{g\in G} \nu(n_g) \geq \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \nu(m_\chi)$ である。) このとき、任意の ℓ に対して $|G_\ell| = |\mathrm{Bl}_\ell(G)|$ が成り立つ。また、任意の $B \in \mathrm{Bl}(G)$ に対して $s(B) = t(B)$ が成り立ち Problem 3.5 は正しい。これによって指標表の形には強い制限が与えられることになる。

4　有限群のブロックとの関係

3 節の内容は、実は有限群の表現論から得られる群アソシエーションスキームのブロックについて分かることを一般の可換アソシエーションスキームに対して考えたものである。ここで、その内容を確認し定義した不変数 $s(B)$, $t(B)$ と群の表現におけるブロックの不足数との関係を説明する。(可換) アソシエーションスキームのブロックに対して不足数を定義したいと考えているが、今のところよい方法は見つかっていない。また非可換アソシエーションスキームに対しても $s(B)$ を定

義したいが、これもうまくいっていない。$t(B)$ は 3 節の方法で定義して問題ないと思われるが、$t(B)$ よりも $s(B)$ の方が重要な不変数であると考えている。

Θ を有限群とする。群環を thin scheme の隣接代数と見て、アソシエーションスキームの場合と同じ記号を使う。$B \in \mathrm{Bl}(\Theta)$ に対して、その**不足数**は

$$d(B) := \min\{\nu(n_\Theta) - \nu(\chi(1)) \mid \chi \in \mathrm{Irr}(B)\}$$

で定義される。このとき、位数 $p^{d(B)}$ のある p-部分群 (不足群) が存在し、ブロックの構造を強く制限することが知られているが、不足群がブロックの構造をどこまで決めるかは完全には分かっていない。

Θ のブロック全体 $\mathrm{Bl}(\Theta)$ と群アソシエーションスキーム $(\Theta, \widehat{\Theta})$ のブロックの全体 $\mathrm{Bl}(\widehat{\Theta})$ との間には自然な全単射がある。$B \in \mathrm{Bl}(\Theta)$ と $\widehat{B} \in \mathrm{Bl}(\widehat{\Theta})$ が対応しているとする。このとき有限群の表現について知られている結果 [10, Lemma 3.6.27, Theorem 5.10.1] から

$$s(\widehat{B}) = t(\widehat{B}) = \nu(n_\Theta) - d(B)$$

が成り立ち、群アソシエーションスキームの場合には Problem 3.5 が正しいことが分かる。また [10, Lemma 3.6.27 (i)] より Problem 3.6 も正しい。

有限群のブロック理論をアソシエーションスキームに拡張しようとしているわけだが、3 節の内容は可換アソシエーションスキームについてのみ考えている。これは非可換有限群のブロックを、一度可換な群アソシエーションスキームを考えることによって扱おうとしているのである。一般の非可換アソシエーションスキームに対しては、その中心がアソシエーションスキームの隣接代数となっていないので、この方法で考えることはできない。しかし **grou-like** [6] と私が呼んでいる場合には有限群と同様の議論ができる。一般の場合にどのように考えるかは今後の課題である。

5　不足数の定義に向けて

可換アソシエーションスキームのブロックに対して、有限群のブロックに対する不足数に相当するものを定義したい。そのためにはどのような性質をもったものを不足数と呼ぶのが妥当かを考える必要がある。

有限群のブロックの不足数について、次の強い結果がある。有限群のブロックについて次は同値である。

(1) $d(B) = 0$.

(2) $|\mathrm{Irr}(B^K)| = 1$. (このとき $|\mathrm{Irr}(B^*)| = 1$ も成り立つ。)

(3) B^* は単純代数。

可換アソシエーションスキームのブロックに対しても (2) と (3) が同値であることは正しく、これを $d(B) = 0$ のための条件と考えるのは自然である。しかし、こ

れを満たすような $d(B)$ の一般的な定義は現在のところ分からない。すなわち (2) の条件を満たすようなブロックをうまく特徴付けることは出来ていない。

また非可換の場合を考えると (2) を満たしても (3) を満たさないような例が存在する。これは B^* が対称代数でないことが原因である。実際、有限群のブロックは対称代数であり、アソシエーションスキームの場合でも B^* が対称代数という仮定の下では (2) から (3) を導くことができる。アソシエーションスキームについては (3) の代りに

(4) $\dim_F Z(B^*) = 1.$

という条件を考えればよいように思われるが、まだあまり考えてはいない。

6 例

最後に 3 節の内容を表す例を示しておく。Johnson scheme $J(17,7)$ を標数 $p=2$ で考えたものである。

まず、その指標表は

$$\left(\begin{array}{rr|rrr|r|rr||r}
1 & 945 & 70 & 7350 & 1470 & 5292 & 4200 & 120 & 1 \\
1 & 201 & 38 & -490 & 238 & -84 & 40 & 56 & 119 \\
1 & 486 & 53 & 210 & -672 & -1134 & 1140 & -84 & 16 \\
1 & -21 & 14 & 119 & -35 & -42 & -56 & 20 & 1700 \\
1 & -9 & -2 & -65 & -23 & 54 & 40 & 4 & 6188 \\
1 & -30 & 5 & 5 & 40 & -51 & 40 & -10 & 3808 \\
1 & 45 & 25 & -35 & -35 & 189 & -155 & -35 & 544 \\
1 & 21 & -7 & 35 & 7 & -21 & -35 & -1 & 7072
\end{array}\right)$$

である。Johnson scheme の場合には行と列に自然に定義される順序があるが、ここではその順序ではなく、あとの説明がしやすいように並べ替えてある。第 1 行は自明な指標で、その値は valency を表している。また列は valency が 2 で割りきれないもの、丁度 1 回割りきれるもの、$\cdots$、と分けて、縦の線で区切ってある。最後の列は指標の重複度である。この表 (重複度を除いたもの) を標数 2 で考えて、次の表を得る。

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|c|cc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|ccc|c|cc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right)$$

いくつかの行が一致するが、一致した行は同じブロックに属する (Proposition 2.3)。重複する行を省いたものが右に書いてある行列である。次に指標に対応する中心的原始べき等元 $e_\chi = \dfrac{m_\chi}{n_G} \sum_{g \in G} \dfrac{1}{n_g} \chi(\sigma_{g^*}) \sigma_g$ の係数を並べて次の行列を得る。

$$\left(\begin{array}{rrrrrrrr}
1/19448 & 1/19448 & 1/19448 & 1/19448 & 1/19448 & 1/19448 & 1/19448 & 1/19448 \\
7/1144 & 67/51480 & 19/5720 & -7/17160 & 17/17160 & -1/10296 & 1/17160 & 49/17160 \\
\hline
2/2431 & 36/85085 & 53/85085 & 2/85085 & -32/85085 & -3/17017 & 19/85085 & -7/12155 \\
\hline
25/286 & -5/2574 & 5/286 & 17/12012 & -25/12012 & -25/36036 & -1/858 & 25/1716 \\
7/22 & -1/330 & -1/110 & -13/4620 & -23/4620 & 1/308 & 1/330 & 7/660 \\
\hline
28/143 & -8/1287 & 2/143 & 2/15015 & 16/3003 & -17/9009 & 4/2145 & -7/429 \\
\hline
4/143 & 4/3003 & 10/1001 & -2/15015 & -2/3003 & 1/1001 & -31/30030 & -7/858 \\
4/11 & 4/495 & -2/55 & 2/1155 & 2/1155 & -1/693 & -1/330 & -1/330
\end{array}\right)$$

この表には分母が偶数のものがあり、このまま標数 2 で考えることはできない。ブロックべき等元 $e_B = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} e_\chi$ を得るために同じブロックに属するものをまとめる。すなわち、次は $\beta_B(g)$ の表である。

$$\left(\begin{array}{rrrrrrrr}
15/2431 & 148/109395 & 41/12155 & -1/2805 & 38/36465 & -1/21879 & 4/36465 & 106/36465 \\
2/2431 & 36/85085 & 53/85085 & 2/85085 & -32/85085 & -3/17017 & 19/85085 & -7/12155 \\
58/143 & -32/6435 & 6/715 & -1/715 & -106/15015 & 23/9009 & 4/2145 & 18/715 \\
28/143 & -8/1287 & 2/143 & 2/15015 & 16/3003 & -17/9009 & 4/2145 & -7/429 \\
56/143 & 424/45045 & -12/455 & 8/5005 & 16/15015 & -4/9009 & -61/15015 & -8/715
\end{array}\right)$$

これを標数 2 で考えて、次の表を得る。

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|c|cc}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)$$

以上で、同じ大きさの標数 2 での行列が二つ得られた。はじめの行列のある行を右から見て、はじめて 0 でなくなる部分と、二つ目のの行列を左から見て、はじめて 0 でなくなる部分とが一致するというのが Theorem 3.2 である。それ以外の結果や問題も、この例をよく見て頂けば理解できるかと思う。

References

[1] Z. Arad, Y. Erez, M. Muzychuk, On even generalized table algebras, J. Alg. Comb. **17** (2003), 163 – 170.

[2] Z. Arad, E. Fisman, M. Muzychuk, Generalized table algebras, Israel J. Math. **114** (1999), 29 – 60.

[3] A. E. Brouwer, C. A. van Eijl, On the p-rank of the adjacency matrices of strongly regular graphs, J. Alg. Comb. **1** (1992), 329–346.

[4] A. Hanaki, Semisimplicity of adjacency algebras of association schemes, J. Alg. **225** (2000), 124 - 129.

[5] A. Hanaki, Locality of a modular adjacency algebra of an association scheme of prime power order, Arch. Math. **79** (2002), 167 - 170.

[6] A. Hanaki, Characters of association schemes and normal closed subsets, Graphs Comb. **19** (2003) 363 - 369.

[7] A. Hanaki, Block decomposition of standard modules, 数理解析研究所講究録 1327 (2003) 38 – 46.

[8] A. Hanaki, M. Yoshikawa, On modular standard modules of association schemes to appear in J. Alg. Comb.

[9] Y. Hieda, Y. Tsushima, On $S_R(H)$-blocks for finite groups, J. Alg. **202** (1998), 583 – 588.

[10] H. Nagao, Y. Tsushima, Representations of Finite Groups, Academic Press, New York, 1989.

[11] R. Peeters, On the p-rank of the adjacency matrices of distance-regular graphs, J. Alg. Comb. **15** (2002), 127–149.

[12] G. R. Robinson, Some remarks on Hecke algebras, J. Alg. **163** (1994), 806 – 812.

[13] O. Shimabukuro, An analog of Nakayama's conjecture for Johnson schemes, to appear in Ann. Comb.

[14] M. Yoshikawa, Modular adjacency algebras of the Hamming schemes, to appear in J. Alg. Comb.

[15] P.-H. Zieschang, An Algebraic Approach to Association Schemes, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1996.

花木 章秀 (Akihide Hanaki)
hanaki@math.shinshu-u.ac.jp