Gröbner 基底入門

信州大学·理学部　花木 章秀 (Akihide Hanaki)
Faculty of Science, Shinshu University

1　はじめに

Gröbner 基底とは、簡単にいえばイデアルの “よい” 生成系のことである。例えば多項式環 $k[x,y]$ において

$$I = \langle x^2, x^3 + y \rangle$$

を考えたとする。剰余環 $k[x,y]/I$ の元 $x^4 + I$ の “よい” 表記を得るために簡略化を試みる。

$$x^4 + I = x^2 \cdot x^2 + I = I$$

$$x^4 + I = -xy + x(x^3 + y) + I = -xy + I$$

と二通りの簡略化が考えられる。この二つの元が等しいことを見るには、一度次数を大きくして考えなければならない。またこの程度ならば容易であるが、一般に $f + I = g + I$ かどうかを判定することは簡単ではない。もし I の生成系が

$$I = \langle x^2, y \rangle$$

で与えられるならば、$k[x,y]/I$ の任意の元は一意的に

$$ax + b + I \quad (a, b \in k)$$

の形に表されることはすぐに分かるであろう。$\{x^2, y\}$ はイデアル I の Gröbner 基底であり、多項式環の任意のイデアルに対して Gröbner 基底は存在する。更に与えられた生成系から Gröbner 基底を求めるアルゴリズムがある。これを利用すればイデアルに関する多くの問題が原理的に解ける。ここで多項式環が Noether 環であるため、イデアルは有限生成であることが重要である。

ここではよく知られている多項式環の Gröbner 基底の理論を紹介した後、path algebra の Gröbner 基底の理論を説明し、それを利用して加群の射影分解 (Anick-Green 分解) を構成する方法を説明する。証明はほとんどしないので、興味のある方は参考文献を見て頂きたい。今回の話は多項式環の場合については [1], [2]、path algebra の場合は [3] の一部の解説である。

2　多項式環の Gröbner 基底

この節では多項式環の Gröbner 基底について解説する。k を体とし $k[\boldsymbol{x}] = k[x_1, \cdots, x_n]$ を n 変数多項式環とする。$k[\boldsymbol{x}]$ は Noether 環なので任意のイデアルは有限生成である。また $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$ とする。

2.1　項順序

$$\mathbb{T} = \{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \mid \alpha_i \in \mathbb{N}\}$$

を考える。$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ として $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ と略記する。

定義 2.1. $\mathbb{T}$ の全順序 $<$ が**項順序**であるとは、次の条件を満たすこととする。

(1) $1 < \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}}$ for all $1 \neq \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} \in \mathbb{T}$.

(2) If $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} < \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}}$, then $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\gamma}} < \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\gamma}}$ for all $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\gamma}} \in \mathbb{T}$.

$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \mid \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}}$ をある $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\gamma}} \in \mathbb{T}$ があって $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\gamma}}$ となることで定義する。

命題 2.2. $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \mid \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}}$ ならば任意の項順序 “$<$” について $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \leq \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}}$ である。

命題 2.3. 項順序は整列順序である。

Proof. $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}_1} > \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}_2} > \cdots$ とすると $\langle \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}_1} \rangle \subsetneq \langle \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}_1}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}_2} \rangle \subsetneq \cdots$ となり $k[\boldsymbol{x}]$ が Noether 環であることに反する。 □

ここでいくつかの重要な項順序の例をあげておく。項順序は

$$\{\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \mathbb{N}\}$$

の順序と同一視できるので、これを断り無しに同一視する。以下の例はどれも項順序である。

例 2.4 (辞書式順序). $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) < \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ を、ある N があって $\alpha_i = \beta_i$ for $i < N$, $\alpha_N < \beta_N$ となることで定める。

例 2.5 (次数辞書式順序). $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ を、$\sum_{i=1}^n \alpha_i < \sum_{i=1}^n \beta_i$ または $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i$ であって辞書式で $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ となることで定める。

例 2.6 (次数逆辞書式順序). $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ を、$\sum_{i=1}^n \alpha_i < \sum_{i=1}^n \beta_i$ または $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i$ であってある N に対して $\alpha_i = \beta_i$ for $i < N$, $\alpha_N > \beta_N$ となることで定める。

後で説明する Gröbner 基底は項順序によって異なるものとなる。どの項順序を採用するのが好ましいかは、その用途によって変わり、一概には言えない。

2.2 Gröbner 基底

ここでは Gröbner 基底の定義を述べる。そのために次の記号を用意する。$\mathbb{T}$ には項順序が入っているとする。また多項式の同類項はまとめられているものとする。$f \in k[\boldsymbol{x}]$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{lt}(f) &= f \text{ の最高次の項} \\
\mathrm{lc}(f) &= \mathrm{lt}(f) \text{ の係数} \\
\mathrm{lp}(f) &= \mathrm{lt}(f)/\mathrm{lc}(f)
\end{aligned}
$$

とおく。

定義 2.7 (Gröbner 基底). I を $k[\boldsymbol{x}]$ のイデアルとする。I の有限部分集合 G が I の **Gröbner 基底**であるとは任意の $f \in I$ に対して、ある $g \in G$ があって $\mathrm{lp}(g) \mid \mathrm{lp}(f)$ となることである。

定理 2.8. $k[\boldsymbol{x}]$ の任意のイデアル I に対して Gröbner 基底は存在する。また Gröbner 基底はイデアル I の生成系である。

定理の証明はしないが G が有限に取れること以外は自明である。有限性は $k[\boldsymbol{x}]$ が Noether 環であることによる。

$f, g \in k[\boldsymbol{x}]$ に対して f の項 $a\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ が $\mathrm{lt}(g)$ で割り切れるとする。このとき

$$
r = f - \frac{a\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}{\mathrm{lt}(g)}\, g
$$

を考える。このとき f の項 $a\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ は打ち消されて、より次数の低い項で置き換わっている。これを $f \to_g r$ とかき f の g による**簡約化**という。

$k[\boldsymbol{x}] \ni f,\ g_1, \cdots, g_s$ に対して以下の操作を考える。

(1) $\mathrm{lt}(f)$ がある $\mathrm{lt}(g_i)$ で割り切れるならば $f \to_{g_i} f'$ と簡約化し、この f' を f と見て操作を続ける。

(2) $\mathrm{lt}(f)$ がどの $\mathrm{lt}(g_i)$ でも割り切れないならば f の次に大きい項に対して同様の操作を繰り返す。このとき、割り切れずに残された項は以後の操作で変わらないことに注意する。

(3) 以上を何も出来なくなるまで (f のすべての項がどの $\mathrm{lt}(g_i)$ でも割り切れなくなるまで) 繰り返す。

この操作を f の $\{g_1, \cdots, g_s\}$ による**簡約化**という。

G を I の Gröbner 基底とする。$\mathrm{LP}(I) = \{\mathrm{lp}(f) \mid f \in I\}$ とし、

$$\mathrm{nonLP}(I) = \mathbb{T} - \mathrm{LP}(I)$$

とする。任意の多項式は G の元による簡約化によって $\mathrm{nonLP}(I)$ の一次結合に書くことが出来る。またこの記述が一意的であることもすぐに分かる。

Gröbner 基底の定義からすぐに分かるように、Gröbner 基底を含む I の有限部分集合はまた Gröbner 基底である。したがって次のような概念が考えられる。

定義 2.9. I の Gröbner 基底 G が **minimal Gröbner 基底**であるとは、G の任意の真部分集合が Gröbner 基底ではないこととする。また minimal Gröbner 基底 G が **reduced Gröbner 基底**であるとは、$g \in G$ の任意の項が $g' \in G - \{g\}$ に対して $\mathrm{lp}(g')$ で割り切れず、更に $\mathrm{lc}(g) = 1$ が任意の $g \in G$ について成り立つこととする。

定理 2.10. $k[\boldsymbol{x}]$ の任意のイデアル I に対して reduced Gröbner 基底は一意的に存在する。(項順序には依存する。)

2.3 Buchberger アルゴリズム

前節で Gröbner 基底の存在と性質について述べた。Gröbner 基底の理論のよいところは、単に存在するだけではなく、それを具体的に計算できることにある。

$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ に対して

$$\mathrm{lcm}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\max(\alpha_1, \beta_1), \cdots, \max(\alpha_n, \beta_n))$$

とし、

$$\mathrm{lcm}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{lcm}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}$$

とする。

$f, g \in k[\boldsymbol{x}]$ に対して $L = \mathrm{lcm}(\mathrm{lp}(f), \mathrm{lp}(g))$ とする。このとき

$$S(f, g) = \frac{L}{\mathrm{lt}(f)} f - \frac{L}{\mathrm{lt}(g)} g$$

を f と g の S-**多項式**という。

定理 2.11 (Buchberger アルゴリズム). $G = \{g_1, \cdots, g_r\}$, $I = \langle G \rangle$ とする。以下の操作を行う。

(1) $S(g_i, g_j)$ を G で簡約化したものを r とする。(簡約化は一意ではないが構わない。) $r \neq 0$ ならば $G \cup \{r\}$ を新たに G とする。

(2) すべての S-多項式が 0 に簡約化されるようになるまで繰り返す。

この操作は有限回で止まり、得られた G は I の Gröbner 基底である。

Proof. 操作が止まらないとすると無限列 $g_1, g_2, \cdots$ が得られる。十分大きい n に対して $\mathrm{lp}(g_n)$ は $\mathrm{lp}(g_i)$ $(i < n)$ では割り切れないのでイデアルの昇鎖 $\langle \mathrm{lp}(g_1) \rangle \subsetneq \langle \mathrm{lp}(g_1), \mathrm{lp}(g_2) \rangle \subsetneq \cdots$ が得られ $k[\boldsymbol{x}]$ の Noether 性に反する。 □

Buchberger アルゴリズムによって Gröbner 基底を具体的に求めることが出来る。$\mathrm{lp}(g)$ が他の $\mathrm{lp}(g')$ で割れるものを省けば minimal Gröbner 基底が得られる。更に $g \in G$ を $G - \{g\}$ で簡約化し、最高次係数を 1 にしてやれば reduced Gröbner 基底が得られる。

2.4 計算例

$k[x, y] \supset I = \langle x^2, x^3 + y \rangle$ の Gröbner 基底を求める。

$$S(x^2, x^3 + y) = x^3 - (x^3 + y) = -y$$

で $-y$ は簡約化できないので $G = \{x^2, x^3 + y, -y\}$ とする。

$$S(x^2, -y) = x^2 y - x^2 y = 0$$

$$S(x^3 + y, -y) = y(x^3 + y) - x^3 y = y^2 \to_{-y} 0$$

より G は Gröbner 基底である。$\mathrm{lp}(x^2) \mid \mathrm{lp}(x^3 + y)$ より $\{x^2, -y\}$ が minimal であり、$\{x^2, y\}$ が reduced である。

3 Path algebra の Gröbner 基底

ここでは path algebra の Gröbner 基底の理論を紹介する。[3] に合わせるために、これまでと同じ意味のことに違う用語や記号を使う場合がある。

Γ を finite quiver とする。すなわち Γ は有限個の vertex と有限個の arrow からなる図形であり、multiple arrow (同じ始点と同じ終点をもつ複数の arrow) や loop (始点と終点が同じ arrow) も許す。例えば以下のようなものである。

$$\Gamma :\ \begin{tikzcd} \bullet^{u} \arrow[loop left, "a"] \arrow[r, shift left, "b"] \arrow[r, shift right, "c"'] & \bullet^{v} \end{tikzcd}$$

いくつかの arrow をつないだものを path という。path には自然に長さが考えられる。vertex は長さ 0 の path であり、arrow は長さ 1 の path であると考える。path の全体の集合を $\mathcal{B}$ で表す。$\mathcal{B} \cup \{0\}$ には path の結合で自然に積が定義でき、半群の構造が入る。(path a の終点と path b の始点が異なるときは $ab = 0$ とする。) $\mathcal{B}$ を基底とする体 k 上のベクトル空間にこの積で積を定義すれば k-algerba となる。これを Γ の k 上の **path algebra** といい $k\Gamma$ と書く。

ここでは path algebra のイデアルの Gröbner 基底を考えるが、path algebra は一般に Noether 環ではないので、イデアルに次の仮定をする。

定義 3.1. path algebra $k\Gamma$ を考える。正の長さをもつ path で張られる部分空間は $k\Gamma$ のイデアルである。これを J と表すことにする。$k\Gamma$ のイデアル I が **admissible** であるとは、ある N があって $J^2 \supseteq I \supseteq J^N$ となることとする。

以下、常に I を $k\Gamma$ の admissible ideal とし、$\Lambda = k\Gamma/I$ とする。$J^2 \supseteq I$ であることは Λ の Ext. quiver が Γ であることを意味し、$I \supseteq J^N$ は Λ が有限次元になることを意味している。

$\mathcal{B}$ に項順序に相当するものを定義する。

定義 3.2. $\mathcal{B}$ の全順序 "$\leq$" が **admissible ordering** であるとは、次の条件を満たすこととする。

(1) $a, b, u, v \in \mathcal{B}$, $a = ubv$ ならば $a \leq b$

(2) $a, b, u, v \in \mathcal{B}$, $a \leq b$ ならば $uav \leq ubv$ (ただし $uav \neq 0$, $ubv \neq 0$ のとき。)

定義 3.3 (Length-lexicographic ordering). vertex と arrow に任意に全順序を定める。$\mathcal{B}$ に長さ優先の辞書式順序を定めると、それは admissible ordering である。これを **length-lexicographic ordering** という。

arrow に重みを定義して同様に graded ordering を定義しても admissible ordering になる。以下 $\mathcal{B}$ には admissible ordering が定義されているものとする。

$f \in k\Gamma$ に対して $\mathrm{tip}(f)$ を f の最高次の項の係数を除いたものとする。また $S \subset k\Gamma$ に対して $\mathrm{tips}(S) = \{\mathrm{tip}(f) \mid f \in S\}$ とする。イデアル I に対して

$$\mathrm{nonTips}(I) = \mathcal{B} - \mathrm{tips}(I)$$

とする。このとき次が成り立つ。

命題 3.4. $\Lambda = k\Gamma/I$ は $\{f + I \mid f \in \mathrm{nonTips}(I)\}$ を基底にもつ。

定義 3.5. $a, b \in \mathcal{B}$ とする。a が b を**割り切る**とは、ある $u, v \in \mathcal{B}$ があって $b = uav$ となることとする。またこのとき $a \mid b$ と書く。

定義 3.6. $f \in k\Gamma$ が **uniform** であるとは、ある vertices u, v があって $f = ufv$ となることである。すなわち f は u から v への path たちの一次結合であるということである。

f がイデアル I の元ならば

$$f = 1 \cdot f \cdot 1 = \left(\sum_{u:\ \text{vertex}} u \right) f \left(\sum_{u:\ \text{vertex}} v \right) = \sum_{u, v:\ \text{vertex}} ufv$$

と uniform な元の和で書くことができ、更に $ufv \in I$ である。したがってイデアルの生成元は uniform であると仮定することができる。

定義 3.7 (Gröbner 基底). イデアル I の uniform かつ monic な元の部分集合 G が I の **Gröbner 基底**であるとは、任意の $f \in I$ に対して、ある $g \in G$ があって $\mathrm{tip}(g) \mid \mathrm{tip}(f)$ となることである。

Gröbner 基底を有限に取ることができることは admissible ideal の定義から明らかである。

命題 3.8. G が I の Gröbner 基底であるならば $I = \langle G \rangle$ である。

定義 3.9 (Overlap difference). f, g を I の uniform, monic な元とする。長さ正の $x, y, z \in \mathcal{B}$ があって $\mathrm{tip}(f) = xy$, $\mathrm{tip}(g) = yz$ と書けるとき

$$S_y(f, g) = fz - xg$$

とおいて、これを f と g の y による **overlap difference** という。

定義 3.10 (Minimal Gröbner 基底). I の uniform かつ monic な元の部分集合 G が次の条件を満たすとき G を I の **minimal Gröbner 基底**という。

(1) $I = \langle G \rangle$

(2) $f, g \in G$, $\mathrm{tip}(f) \mid \mathrm{tip}(g)$ ならば $f = g$

(3) $f, g \in I$ の任意の overlap difference は G によって 0 に簡約化される。

命題 3.11. minimal Gröbner 基底は Gröbner 基底である。

この命題から path algebra についても **Buchberger アルゴリズム**が適用できることが分かる。

定義 3.12. G を I の minimal Gröbner 基底とする。各 $g \in G$ を $G - \{g\}$ で簡約化して得られるものを $\mathrm{minSharps}(I)$ と書く。(reduced Gröbner 基底に相当する。) $\mathrm{minSharps}(I)$ はイデアル I に対して一意的に定まる。また $\mathrm{minTips}(I) = \{\mathrm{tip}(f) \mid f \in \mathrm{minSharps}(I)\}$ とする。

4 加群の Anick-Green 分解

ここでは Gröbner 基底の理論の応用として、加群の射影分解を計算する。考える algebra は常に $\Lambda = k\Gamma/I$ (I は admissible ideal) として与えられているものとする。

4.1 Anick-Green 分解

$\gamma \in \mathcal{B}$ に対して、その始点を $o(\gamma)$、終点を $\tau(\gamma)$ で表す。

定義 4.1 (Overlap sets). Γ_0 は vertex 全体の集合、Γ_1 は arrow 全体の集合とする。$\Gamma_n \subset \mathcal{B}$ を以下のように帰納的に定義する。$\gamma \in \Gamma_n$ であるとは以下の条件を満たすことである。

(1) ある $\gamma_1 \in \Gamma_{n-1}$ と $\gamma_2 \in \mathrm{nonTips}(I)$, $\mathrm{Length}(\gamma_2) > 0$ があって $\gamma = \gamma_1\gamma_2$

(2) $\gamma = \gamma_1\gamma_2$, $\gamma_1 \in \Gamma_{n-1}$, $\gamma_1 = \beta_1\beta_2$, $\beta_1 \in \Gamma_{n-2}$ ならば $\beta_2\gamma_2 \in \mathrm{tips}(I)$

(3) γ の left proper factor は (1), (2) を満たさない。

Γ_n を **overlap set** という。

vertex v に対して $v\Lambda$ は射影的 Λ-加群である。$v\Lambda$ を射影被覆とする単純 Λ-加群を k_v と書いて **vertex simple module** という。$\bigoplus_{v\in\Gamma_0} k_v$ の Anick-Green 分解は次で与えられる。

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{\gamma\in\Gamma_n} \tau(\gamma)\Lambda \xrightarrow{d_n} \bigoplus_{\gamma\in\Gamma_{n-1}} \tau(\gamma)\Lambda \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow \bigoplus_{a\in\Gamma_1} \tau(a)\Lambda \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{v\in\Gamma_0} v\Lambda \xrightarrow{\varepsilon} \bigoplus_{v\in\Gamma_0} k_v \longrightarrow 0$$

これが完全列になるように ε と d_n を定める。したがって Anick-Green 分解は射影分解である。ε は $\mathrm{Length}(a) > 0$ に対して $\varepsilon(va) = 0$ で定めればよい。d_1 は

$$d_1(\tau(a)\lambda) = o(a)a\lambda$$

で定める。

次に $s_0 : \mathrm{Im}(d_1) \to \bigoplus_{a\in\Gamma_1} \tau(a)\Lambda$ を以下のように定める。$x \in \mathrm{Im}(d_1)$ は $x = ay$, $a \in \Gamma_1$, $y \in \mathrm{nonTips}(I)$ と一意的に分解できる。これを用いて

$$s_0(x) = \tau(a)y$$

とする。このとき $d_1 s_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}(d_1)}$ が成り立つ。

d_2 を s_0 を用いて定義する。$\gamma \in \Gamma_2$ に対して $\gamma = ay$, $a \in \Gamma_1$, $y \in \mathrm{nonTips}(I)$ となる分解は一意的である。このとき

$$d_2(\tau(\gamma)) = \tau(a)y - s_0 d_1(\tau(a)y)$$

とする。このとき $\ker(d_1) = \mathrm{Im}(d_2)$ が成り立つ。すなわちここで完全性が成り立つ。

次に $s_1 : \ker(d_1) \to \bigoplus_{\gamma\in\Gamma_2} \tau(\gamma)\Lambda$ を定める。このために $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma_n} \tau(\gamma)\Lambda$ に項順序を定める。$\bigoplus_{\gamma\in\Gamma_n} \tau(\gamma)\Lambda$ は

$$\mathcal{B}_n = \{\tau(\gamma)\lambda \mid \gamma \in \Gamma_n,\ \lambda \in \mathrm{nonTips}(I),\ \tau(\gamma)\lambda \neq 0\}$$

を基底にもつ。$\mathcal{B}_n \to \mathcal{B}$ を $\tau(\gamma)\lambda \mapsto \gamma\lambda$ で定めれば、これは単射になるので $\mathcal{B}$ の順序で $\mathcal{B}_n$ に順序を定める。この順序で $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma_n} \tau(\gamma)\Lambda$ の元 ϕ に対して $\mathrm{tip}(\phi)$ を定める。さて s_1 を定義しよう。$\phi \in \ker(d_1)$ に対して

(1) $\phi = 0$ ならば $s_1(\phi) = 0$

(2) $\mathrm{tip}(\phi)=\tau(a)y,\ a\in\Gamma_1,\ y\in\mathrm{nonTips}(I)$ と一意的に書ける。c を ϕ における $\tau(a)y$ の係数とする。$ay=\gamma z,\ \gamma\in\Gamma_2,\ z\in\mathrm{nonTips}(I)$ と一意的に書ける。

$$s_1(\phi)=c\tau(\gamma)z+s_1(\phi-d_2(c\tau(\gamma)z))$$

と定める。

ここで s_1 の定義に s_1 が含まれているが、$\mathcal{B}$ が整列順序集合なので、この計算は止まり $d_2s_1=\mathrm{id}_{\ker(d_1)}$ が成り立つ。

以上を用いて $d_n,\ s_n$ を帰納的に定義する。$n\geq 3$ とする。$\gamma\in\Gamma_n$ は $\gamma=\gamma_1\gamma_2,\ \gamma_1\in\Gamma_{n-1},\ \gamma_2\in\mathrm{nonTips}(I)$ と一意的に分解する。これを用いて

$$d_n(\gamma)=\tau(\gamma_1)\gamma_2-s_{n-2}d_{n-1}(\tau(\gamma_1)\gamma_2)$$

とする。

次に $s_{n-1}:\ker(d_{n-1})\to\bigoplus_{\gamma\in\Gamma_n}\tau(\gamma)\Lambda$ を定める。$\phi\in\ker(d_{n-1})$ に対して

(1) $\phi=0$ ならば $s_1(\phi)=0$

(2) $\mathrm{tip}(\phi)=\tau(\gamma_1)y,\ \gamma_1\in\Gamma_{n-1},\ y\in\mathrm{nonTips}(I)$ と一意的に書ける。c を ϕ における $\tau(\gamma_1)y$ の係数とする。$\gamma_1y=\gamma z,\ \gamma\in\Gamma_n,\ z\in\mathrm{nonTips}(I)$ と一意的に書ける。

$$s_{n-1}(\phi)=c\tau(\gamma)z+s_{n-1}(\phi-d_n(c\tau(\gamma)z))$$

と定める。

以上の構成で Anick-Green 分解が定義できて、射影分解であることが確認できる。現時点では一つの加群の分解を求めたにすぎず、またこれは一般に極小分解ではない。

4.2 Vertex simple module の分解

前節では $\bigoplus_{v\in\Gamma_0}k_v$ の射影分解を求めたが、一つの vertex simple module の分解は、これから簡単に求めることができる。

$$\Gamma_n^v=\{\gamma\in\Gamma_n\mid o(\gamma)=v\}$$

$$P_n^v=\bigoplus_{\gamma\in\Gamma_n^v}\tau(\gamma)\Lambda$$

とする。このとき $\bigoplus_{v\in\Gamma_0}k_v$ の分解の制限 $d_n^v:P_n^v\to P_{n-1}^v$ が k_v の射影分解である。

4.3 任意の module の分解

ここでは任意の加群の分解を求める。そのためには加群を明確な形で与えなければならない。加群 M は完全列

$$\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} v_j\Lambda \xrightarrow{F} \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} v_i\Lambda \xrightarrow{\Phi} M \longrightarrow 0$$

で与えられるものとする。

新たに algebra Λ^* を構成する。

$$\Lambda^* = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & m \\ 0 & f \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in k,\ m \in M,\ f \in \Lambda \right\}$$

とし、和と積は通常の行列演算で定める。自然に Λ を Λ^* に埋め込むことができるので Λ^*-加群は Λ-加群と見ることができる。$v^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと v^* は Λ^* の primitive idempotent で、対応する既約加群 k_{v^*} は 1 次元である。更に Λ-加群として $\Omega(k_{v^*}) \cong M$ が成り立つ (Ω は Heller operator)。

Quiver Γ に対して vertex v^* と $i \in \mathcal{I}$ に対して arrow $a_i^* : v^* \to v_i$ を付け加えて、新たに Γ^* を構成する。$k\Gamma^*$ のイデアル I^* を I と $\{\sum_{i\in\mathcal{I}} a_i^* f_{ij} \mid j \in \mathcal{J}\}$ で生成されるイデアルとする。ここで f_{ij} は nonTips(I) の一次結合で

$$F(v_j) = \sum_i v_i f_{ij} v_j, \qquad f_{ij} = v_i f_{ij} v_j$$

で一意的に定まるものである。このとき $\Lambda^* \cong k\Gamma^*/I^*$ が成り立つ。

更に $k\Gamma^*$ に新しい項順序を定義する。Γ^* の path は、元からある点 v, 新たに付け加えた点 v^*, 元からある path γ, 新たな path $a_i^*\gamma$ がある。これに

$$v < v^* < \gamma < a_i^*\gamma$$

で順序を定める。ただしここで $\{a_i^*\}$ には全順序が定められているものとし $a_i^*\gamma < a_j^*\gamma'$ は $a_i^* < a_j^*$ であるか、または $a_i^* = a_j^*$ かつ $\gamma < \gamma'$ で定義する。元の順序が admissible ならば、この順序も admissible になる。(元の順序が length-lex であっても、この順序は length-lex ではない。)

定理 4.2. k_{v^*} の Anick-Green 分解を

$$\cdots \longrightarrow P_n^{v^*} \xrightarrow{d_n} P_{n-1}^{v^*} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1^{v^*} \xrightarrow{d_1} P_0^{v^*} \xrightarrow{\varepsilon} k_{v^*} \longrightarrow 0$$

とする。このとき

$$\cdots \longrightarrow P_n^{v^*} \xrightarrow{d_n} P_{n-1}^{v^*} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2^{v^*} \xrightarrow{d_2} \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} v_i\Lambda \xrightarrow{\Phi} M \longrightarrow 0$$

は M の射影分解である。ここで $P_n^{v^*}$ には $v\Lambda^* \cong v\Lambda$ (v は Γ の vertex) しか現れないことに注意しておく。

4.4 極小分解を得るために

極小分解を得るためには加群を与える表現 $P_2 \to P_1 \to M \to 0$ から余分な項を取り除く方法があればよい。

命題 4.3. 完全列

$$\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} v_j\Lambda \xrightarrow{F} \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} v_i\Lambda \xrightarrow{\Phi} M \longrightarrow 0$$

において F は行列 (f_{ij}) で与えられているとする。すなわち $F(v_j) = \sum_i v_i f_{ij} v_j$ である。第二項が余分な項を含むことは $\mathrm{Im}(F)$ が $\mathrm{Rad}(\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} v_i\Lambda)$ に含まれないことと同値である。このときある $i_0 \in \mathcal{I}$, $j_0 \in \mathcal{J}$, $g \in \Lambda$ があって $v_{j_0} = v_{i_0}$, $v_{i_0} g v_{j_0} = g$, $f_{i_0 j_0} g = g f_{i_0 j_0} = v_{i_0}$ である。

$\mathcal{I}' = \mathcal{I} - \{i_0\}$, $\mathcal{J}' = \mathcal{J} - \{j_0\}$ とおいて

$$f'_{ij} = f_{ij} - f_{ij_0} g f_{i_0 j}$$

とする。$F' = (f'_{ij})$ とすれば

$$\bigoplus_{j\in\mathcal{J}'} v_j\Lambda \xrightarrow{F'} \bigoplus_{i\in\mathcal{I}'} v_i\Lambda \xrightarrow{\Phi} M \longrightarrow 0$$

はまた完全列である。

4.5 具体例

講演では二面体群 Q_8 の自明な加群の分解を計算したが、その内容は [3, §3.7] と同じなのでここでは省略する。

References

[1] W. W. Adams, P. Loustaunau, An Introduction to Gröbner Bases, Graduate Studies in Mathematics **3**, AMS, 1994.

[2] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, Ideals, Varieties, and Algorithms, Springer, 1996. (グレブナー基底 1, 2, Springer)

[3] D. J. Green, Constructing Projective Resolutions for p-groups, Universität GH Essen, 1997.