アソシエーションスキームの表現

Akihide Hanaki (花木 章秀)

Faculty of Science, Shinshu University,
Matsumoto, 390-8621, Japan
hanaki@math.shinshu-u.ac.jp

April 20, 2007

Contents

Chapter 1

アソシエーション・スキーム

このノートを通して I_n または単に I と書いて n 次単位行列を表す。また J_n または J ですべての成分が 1 である n 次正方行列を表す。行列 M に対して ${}^tM$ でその転置行列を表し、M_{xy} または $M_{x,y}$ でその (x,y)-成分を表す。δ_{xy}, $\delta_{x,y}$ はクロネッカーのデルタとする。

1.1 定義といくつかの例

X を有限集合とする。$X \times X$ の部分集合を X 上の**関係** (relation) という。X 上の関係 s に対して

$$s^* = \{(y,x) \mid (x,y) \in s\}$$

とおく。また $x \in X$ と関係 s に対して

$$xs = \{y \in X \mid (x,y) \in s\}, \quad sx = \{y \in X \mid (y,x) \in s\}$$

とおく。明らかに $sx = xs^*$ である。関係 s に対して、その**隣接行列** (adjacency matrix) を σ_s で表す。すなわち σ_s は行、列、共に集合 X で添字付けられた行列で、その (x,y)-成分は $(x,y) \in s$ のとき 1、 $(x,y) \notin s$ のとき 0 と定めたものである。明らかに $\sigma_{s^*} = {}^t\sigma_s$ である。

S を X 上のいくつかの空でない関係の集合とする。(X,S) が**アソシエーション・スキーム** (association scheme) であるとは

(1) S は $X \times X$ の分割。すなわち $X \times X = \bigcup_{s \in S} s$ であり、任意の $s \in S$ は空でなく、$s,t \in S$ に対して $s \neq t$ ならば $s \cap t = \phi$.

(2) $1 = \{(x,x) \mid x \in X\} \in S$.

(3) $s \in S$ ならば $s^* \in S$.

(4) $s,t,u \in S$ に対して $(x,y) \in u$ ならば $p_{st}^u = |xs \cap ty|$ は $(x,y) \in u$ の取り方によらず一定である ($s,t,u \in S$ のみで決まる)。

を満たすこととする。X を省略して S をアソシエーション・スキームとも言うことにする。また省略して単に**スキーム**ともいう。(4) の条件が理解しにくいが、条件を隣接行列を使って書き直すと分かりやすい。

(1)' $\sum_{s\in S} \sigma_s = J$, かつ任意の $s \in S$ に対して $\sigma_s \neq 0$.

(2)' ある $1 \in S$ があって $\sigma_1 = I$.

(3)' $s \in S$ ならば $s^* \in S$.

(4)' ある非負整数 p_{st}^u があって $\sigma_s\sigma_t = \sum_{u\in G} p_{st}^u \sigma_u$.

(4) に現れる定数 p_{st}^u をアソシエーション・スキーム (X,S) の**交叉数** (intersection number) という。$|X|$ を (X,S) の**位数** (order) という。また $|S|-1$ を (X,S) の**クラス** (class) という。$|S|$ を (X,S) の**ランク** (rank) ということもある。

問 1.1. 条件 (4) と (4)' が同値であることを示せ。

例 1.2 (クラス 1 のアソシエーション・スキーム)**.** X を有限集合とし $1 = \{(x,x) \mid x \in X\}$, $s = \{(x,y) \mid x \neq y\}$ とすると $(X, \{1,s\})$ はクラス 1 のアソシエーション・スキームとなる。

例 1.3. G を有限群とし、f をその正則右置換表現とする。すなわち $s \in G$ に対して $f(s)$ は行、列、共に G で添字が付けられた行列でその (x,y)-成分は $xs = y$ のとき 1 で、それ以外のとき 0 と定める。$f(s)$ を隣接行列とする G 上の関係を、同じ記号を使って s と表すことにする。このとき (G,G) はアソシエーション・スキームである。

例 1.4 (群アソシエーション・スキーム)**.** G を有限群とし、f をその正則右置換表現とする。$C_1,\cdots,C_k$ を G の共役類とし、共役和を $\widehat{C_i}$ で表す。$f(\widehat{C_i})$ を隣接行列し、それによって定める関係を同じ記号 C_i で表すことにすれば $(G,\{C_1,\cdots,C_k\})$ はアソシエーション・スキームである。これを G の**群アソシエーション・スキーム** (group association scheme) という。

例 1.5 (シュアー的スキーム). G を有限集合 X 上の可移置換群とする。G は自然に $X \times X$ にも作用する。S をこの作用の軌道とすると (X, S) はアソシエーション・スキームとなる。このようにして得られるアソシエーション・スキームを**シュアー的スキーム** (Schurian scheme) という。

問 1.6. 例 1.5 によって得られる (X, S) がアソシエーション・スキームであることを示せ。

問 1.7. 群アソシエーション・スキームはシュアー的であることを示せ。

例 1.8 (ハミング・スキーム). $\Omega = \{0, 1\}$ とし $X = \Omega^n$ とする。$x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n) \in X$ に対して

$$d(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$$

とおき、これを**ハミング距離**という。

$$s_i = \{(x, y) \mid d(x, y) = i\}$$

として X 上の関係 s_i $(i = 0, 1, \cdots, n)$ を定義する。このとき $(X, \{s_i \mid i = 0, 1, \cdots, n\})$ はアソシエーション・スキームである。これを**ハミング・スキーム** (Hamming scheme) といい $H(n)$ と表す。

例 1.9 (関係行列). アソシエーション・スキームを具体的に表すには関係行列と呼ばれる行列を用いると便利である。$S = \{1 = s_0, s_1, \cdots, s_d\}$ とする。このとき $R = \sum_{i=0}^{d} i\sigma_{s_i}$ を**関係行列** (relation matrix) という。($1 \in S$ の添字は 0 とするのが標準的である。) 関係行列からアソシエーション・スキームが決定されるが、X と S の元の並べ方には自由度がある。関係行列を考えることは有限群の場合で言うと完全な乗法表を与えることとほぼ同じで、したがって X が大きなときにはあまり良い記述ではない。しかし、群の作用やグラフなどの組合せ論的な情報のないアソシエーション・スキームを具体的に記述するためには、他に良い方法は見当たらない。

　ハミング・スキーム $H(2)$ の関係行列は以下の通りである。

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 00 & 01 & 10 & 11 \end{array} \\ \begin{array}{c} 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

問 1.10. ハミング・スキームについて

(1) ハミング・スキーム $H(3)$ の関係行列を書け。

(2) ハミング距離が距離の公理を満たすことを示せ。

(3) 交叉数 p_{st}^{u} を計算せよ。

(4) ハミング・スキームがアソシエーション・スキームであることを示せ。

(5) $\Omega = \{0, 1, \cdots, q-1\}$ として、同様にアソシエーション・スキームが定義できることを示せ。(これもハミング・スキームと呼び $H(n, q)$ と書く。)

例 1.11 (ジョンソン・スキーム)**.** $\Omega = \{1, 2, \cdots, v\}$ とし k を $k \leq v/2$ なる自然数とする。X を Ω の k-部分集合全体の集合とする。$x, y \in X$ に対して

$$d(x, y) = k - |x \cap y|$$

とおく。

$$s_i = \{(x, y) \mid d(x, y) = i\}$$

として X 上の関係 s_i $(i = 0, 1, \cdots, k)$ を定義する。このとき $(X, \{s_i \mid i = 0, 1, \cdots, k\})$ はアソシエーション・スキームである。これを**ジョンソン・スキーム** (Johnson scheme) といい $J(v, k)$ と表す。

$J(4, 2)$ の関係行列は以下の通りである。

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \end{array} \\
\begin{array}{c} 12 \\ 13 \\ 14 \\ 23 \\ 24 \\ 34 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

問 1.12. ジョンソン・スキームについて

(1) ジョンソン・スキーム $J(5, 2)$ の関係行列を書け。

(2) $d(x, y)$ が距離の公理を満たすことを示せ。

(3) 交叉数 p_{st}^{u} を計算せよ。

(4) ジョンソン・スキームがアソシエーション・スキームであることを示せ。

(5) $k \leq v/2$ という仮定をなくしてもジョンソン・スキームは定義できる。しかし $J(v,k)$ と $J(v,v-k)$ はアソシエーション・スキームとして本質的に同じものであるので $k \leq v/2$ という仮定しても一般性を失わない。このことを示せ。

例 1.13 (距離正則グラフ, P-多項式スキーム). S の元の適当な番号付け $S=\{1=g_0,g_1,\cdots,g_d\}$ と有理係数多項式 $f_i(x)$ $(i=0,1,\cdots,d, \deg f_i = i)$ があって $\sigma_{s_i}=f_i(\sigma_{s_1})$ と書け、更に任意の $s_i \in S$ に対して ${s_i}^* = s_i$ であるとき S を **P-多項式スキーム** (P-polynomial scheme) と呼ぶ。また σ_{s_1} を隣接行列として定義される単純グラフを**距離正則グラフ** (distance-regular graph) と呼ぶ。特に $d=2$ の距離正則グラフを**強正則グラフ** (strongly-regular graph) という。

例えばハミング・スキームとジョンソン・スキームは P-多項式スキームである。

例 1.14 (サイクロトミック・スキーム [12, Example 4]). q を素数べきとし $GF(q)$ を q-元体とする。ω を $GF(q)$ の原始元とする。$d \mid q-1$ に対して $GF(q)$ の分割 $C_0=\{0\},C_1,\cdots,C_d$ を以下のように定める。

$$C_i = \left\{ \omega^{i+ad} \mid a=0,1,\cdots,\frac{q-1}{d} \right\} \quad (i=1,2,\cdots,d)$$

$X=GF(q)$ とし、X 上の関係 $s_i=\{(x,y) \mid x-y \in C_i\}$ を考える。このとき $S=\{s_0,s_1,\cdots,s_d\}$ とすれば (X,S) はアソシエーション・スキームである。これを**サイクロトミック・スキーム** (cyclotomic scheme) といい $Cyc(q,d)$ と書く。

アソシエーション・スキームの条件 (4)' から

$$\mathbb{Z}S = \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}\sigma_s$$

は環になる。単位元 1 を持つ可換環 R に対して

$$RS = \mathbb{Z}S \otimes_{\mathbb{Z}} R$$

は R-代数となる。これを S の R 上の**隣接代数** (adjacency algebra) という。より簡単に言うと σ_s を R を成分とする行列と見て、$\{\sigma_s \mid s \in S\}$ の生成する行列環が RS である。断りなしに σ_s を適当な係数環の上の行列と見る場合もある。隣接代数は、特にそれが可換であるとき**ボース–メスナー代数** (Bose-Mesner algebra) とも呼ばれる。また近年では [43] において**スキーム環** (scheme ring) とも呼ばれている。

例 1.15. (1) 例 1.3 のアソシエーション・スキームの隣接代数は自然に群代数と同型である。

(2) 例 1.4 の群アソシエーション・スキームの隣接代数は自然に群代数の中心と同型である。

(3) 例 1.5 のアソシエーション・スキームの隣接代数は置換群から得られるヘッケ代数と同型である。

$\mathbb{Z}S$ が可換環のとき、すなわち $p_{st}^u = p_{ts}^u$ が任意の $s, t, u \in S$ について成り立つとき、アソシエーション・スキーム (X, S) は**可換** (commutative) であるという。また任意の $s \in S$ について $s^* = s$ であるとき (X, S) は**対称** (symmetric) であるという。

問 1.16. 対称アソシエーション・スキームは可換であることを示せ。

注意. いくつかの文献では対称スキームのことをアソシエーション・スキームと呼んでいる。またこのテキストの意味のアソシエーション・スキームを homogeneous coherent configuration と呼ぶ文献もある。

問 1.17 (可換スキームの対称化)**.** (X, S) を可換スキームとする。$s \in S$ に対して $\widetilde{s} = s \cup s^*$ とおく。$\widetilde{S} = \{\widetilde{s} \mid s \in S\}$ とすれば $(X, \widetilde{S})$ は対称スキームとなることを示せ。(これを (X, S) の**対称化** (symmetrization) という。非可換スキーム (X, S) に対しては、同様に $(X, \widetilde{S})$ を定義しても、それは一般にアソシエーション・スキームとはならない。)

例 1.18 (融合スキームと裂開スキーム)**.** 問 1.17 のようにアソシエーション・スキーム (X, S) の関係の和集合を取ることによって、アソシエーション・スキーム (X, S') が得られるとき、(X, S') を (X, S) の**融合スキーム** (fusion scheme)、(X, S) を (X, S') の**裂開スキーム** (fission scheme) という。例えば例 1.4 の群アソシエーション・スキームは例 1.3 によって群から作られるアソシエーション・スキームの融合スキームである。明らかに可換スキームの融合スキームは可換であり、対称スキームの融合スキームは対称である。また融合スキームの隣接代数は元のスキームの隣接代数の部分代数である。

例 1.19. G を可移置換群とし H をその可移な部分群とする。G と H から得られるシュアー的スキームを、それぞれ (X, S), (X, S') とすると (X, S) は (X, S') の融合スキームである。

アソシエーション・スキームの定義から得られるいくつかの事柄を示しておく。

命題 1.20. (X, S) をアソシエーション・スキームとする。$s \in S, x \in X$ に対して $|xs| = |sx|$ であり、この値は $x \in X$ の取り方によらない。言い換えると、隣接行列 σ_s の各行、各列にはちょうど $|xs| = |sx|$ 個の 1 がある。

Proof. $x \in X$ に対し $(x, x) \in 1$ なので $p^1_{ss^*} = |xs \cap s^*x| = |xs|$ であり、これは $x \in X$ の取り方によらない。また $|xs|$ は σ_s の x に対応する行に含まれる 1 の数に等しい。同様に $|sx|$ は σ_s の x に対応する列に含まれる 1 の数に等しいく、この値も $x \in X$ の取り方によらない。よって σ_s の成分すべての和を考えれば $|xs| = |sx|$ である。 □

この命題の $|xs| = |sx|$ を n_s と書き、これを $s \in S$ の**分岐指数** (valency) という。以後、断りなしに $s \in S$ の分岐指数を n_s と書く。$T \subset S$ に対して $\sigma_T = \sum_{t \in T} \sigma_t$, $n_T = \sum_{t \in T} n_t$ とおく。特に $\sigma_S = J$ であり、また $n_S = |X|$ である。

交叉数 p^u_{st} は隣接代数の構造定数と見ることもできる。これに関するいくつかの公式を示す。

命題 1.21. 交叉数 p^u_{st} と分岐指数 n_s について次が成り立つ。

(1) $n_s = n_{s^*}$.

(2) $p^t_{1s} = p^t_{s1} = \delta_{st}$.

(3) $p^1_{st} = n_s \delta_{s^*t}$.

(4) $p^u_{st} = p^{u^*}_{t^*s^*}$.

(5) $\sum_{u \in S} p^u_{st} p^w_{uv} = \sum_{u \in S} p^u_{tv} p^w_{su}$.

(6) $\sum_{t \in S} p^u_{st} = \sum_{t \in S} p^u_{ts} = n_s$.

(7) $n_s p^{s^*}_{tu} = n_t p^{t^*}_{us} = n_u p^{u^*}_{st}$.

Proof. (1) σ_{s^*} が σ_s の転置行列であることと命題 1.20 より分かる。

(2) σ_1 は単位行列なので明らか。

(3) $x \in X$ に対して $p^1_{st} = |xs \cap tx| = |s^*x \cap tx|$ なので $s^* \neq t$ ならば $p^1_{st} = 0$ であり $s^* = t$ ならば $p^1_{st} = |s^*x| = n_s$ である。

(4) $\sigma_s \sigma_t = \sum_{u \in S} p^u_{st} \sigma_u$ の両辺の転置を考えれば $\sigma_{t^*} \sigma_{s^*} = \sum_{u \in S} p^u_{st} \sigma_{u^*}$ である。

(5) 乗法の結合法則から得られる。すなわち

$$\begin{aligned}(\sigma_s\sigma_t)\sigma_v = \sum_{u\in S} p_{st}^u \sigma_u\sigma_v &= \sum_{u\in S}\sum_{w\in S} p_{st}^u p_{uv}^w \sigma_w\\ \sigma_s(\sigma_t\sigma_v) = \sigma_s \sum_{u\in S} p_{tv}^u \sigma_u &= \sum_{u\in S}\sum_{w\in S} p_{tv}^u p_{su}^w \sigma_w\end{aligned}$$

なので σ_w の係数をくらべて得られる。

(6) $\sigma_S = \sum_{s\in S}\sigma_s$ はすべての成分が 1 の行列である。よって命題 1.20 より $\sigma_s\sigma_S = n_s\sigma_S = \sigma_S\sigma_s$ である。σ_S をばらして考えれば結果を得る。

(7) (5) で $w = 1$ とすれば

$$\sum_{u\in S} p_{st}^u p_{uv}^1 = p_{st}^{v^*} n_v, \quad \sum_{u\in S} p_{tv}^u p_{su}^1 = p_{tv}^{s^*} n_s$$

である。 □

例 1.22 (直積). (X,S), (Y,T) をアソシエーション・スキームとする。$s\in S$, $t\in T$ に対して $X\times Y$ 上の関係 $s\times t$ を $\{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mid (x_1,x_2)\in s,\ (y_1,y_2)\in t\}$ で定め $S\times T = \{s\times t \mid s\in S,\ t\in T\}$ とおく。このとき $(X\times Y,\ S\times T)$ はアソシエーション・スキームとなる。これを (X,S) と (Y,T) の**直積** (direct product) という。$s\times t$ の隣接行列は行列としてのテンソル積 $\sigma_s\otimes\sigma_t$ である。

例 1.23 (レス積). (X,S), (Y,T) をアソシエーション・スキームとする。$s\in S$ に対して $\tilde{s}$ を隣接行列 $\sigma_s\otimes\sigma_1$ で定まる $X\times Y$ の関係とする。また $t\in T$ に対して $\hat{t}$ を隣接行列 $J\otimes\sigma_t$ で定まる $X\times Y$ の関係とする。このとき $S\wr T = \{\tilde{s} \mid s\in S\}\cup\{\hat{t} \mid t\in T\setminus\{1\}\}$ とおけば $(X\times Y, S\wr T)$ はアソシエーション・スキームとなる。これを (X,S) と (Y,T) の**レス積** (wreath product) という。

問 1.24. レス積がアソシエーション・スキームになることを確認せよ。

1.2 同型と代数的同型

アソシエーション・スキームの同型を定義する。アソシエーション・スキーム (X,S) と (X',S') に対して、全単射 $\varphi : X\to X'$ と全単射 $\psi : S\to S'$ が存在して、$(x,y)\in s$ と $(\varphi(x),\varphi(y))\in\psi(s)$ が同値であるとき、この全単射の組 (φ,ψ) を (X,S) から (X',S') への**同型** (isomorphism) という。またこ

のとき (X,S) と (X',S') は**同型** (isomorphic) であるという。特に (X,S) から (X,S) への同型を (X,S) の**自己同型** (automorpsim) という。(X,S) の自己同型全体の集合は自然に群をなす。これを $\mathrm{Aut}(X,S)$ と書き、(X,S) の**自己同型群** (automorphism group) という。(φ,ψ) が (X,S) の自己同型であるとき、すぐに分かるように ψ は φ から決まる。したがって $\mathrm{Aut}(X,S)$ は X 上の対称群の部分群と見ることが出来る。S 上に自明に作用する自己同型の全体は $\mathrm{Aut}(X,S)$ の正規部分群をなす。これを $\mathrm{Aut}_0(X,S)$ と書くことにする。これを自己同型群と呼ぶこともある。S 上に自明に作用する自己同型は関係行列と可換な置換行列の全体と見ることも出来る。

アソシエーション・スキーム (X,S) と (X',S') に対して、全単射 $\psi:S\to S'$ が存在して、$p_{st}^u=p_{\psi(s)\psi(t)}^{\psi(u)}$ が成り立つとき、ψ を (X,S) から (X',S') への**代数的同型** (algebraic isomorphism) という。このとき (X,S) と (X',S') は**代数的に同型** (algebraically isomorphic) であるという。(X,S) からそれ自身への代数的同型を**代数的自己同型** (algebraic automorpsim) という。代数的自己同型の全体はやはり群をなす。これを $\mathrm{Aut}_{\mathrm{alg}}(X,S)$ と書き、(X,S) の**代数的自己同型群** (algebraic automorphism group) という。(X,S) と (X',S') が同型ならばそれは代数的にも同型であるが、逆は正しくない。(X,S) と (X',S') が代数的に同型ならば、任意の係数環上でその隣接代数は同型になる。後で説明する表現や指標に関することは、その多くが隣接代数によって決まるため、代数的に同型なアソシエーション・スキームに対しては同じことが成り立つ。

自己同型は代数的自己同型を引き起こすので、群準同型 $\mathrm{Aut}(X,S)\to\mathrm{Aut}_{\mathrm{alg}}(X,S)$ が得られる。この核が $\mathrm{Aut}_0(X,S)$ である。また一般にこの準同型は全射ではない。すなわち自己同型からは得られない代数的自己同型が存在する。

一般に可移置換群はシュアー的スキーム (例 1.5) を定めるが、非同型な可移置換群が同型なアソシエーション・スキームを定める場合がある。例えば 2 重可移群からはすべてクラス 1 のスキームが生じる。(X,S) を可移置換群 G から得られるシュアー的スキームとする。適当な同一視によって G は $\mathrm{Aut}_0(X,S)$ の部分群と見ることが出来る。$G=\mathrm{Aut}_0(X,S)$ であるとき G を **2-閉** (2-closed) であるという。シュアー的スキームは 2-閉可移置換群と一対一に対応する。シュアー的スキーム (X,S) に対して $\mathrm{Aut}_0(X,S)$ は可移置換群となるが、$\mathrm{Aut}_0(X,S)$ が可移でも (X,S) がシュアー的とは限らない。

Chapter 2

通常表現と指標理論の基礎

2.1 定義と基本性質

この節では複素数体 $\mathbb{C}$ 上の隣接代数とその表現、指標の基本的なことを解説する。

k を体とする。k-代数 A の**表現** (representation) とは A からある次数の全行列環 $M_n(k)$ への代数準同型のことである。A の表現を考えることと、右 A-加群を考えることは同等であるので、状況に応じて両方を使う。また特に断らない限り代数や加群は有限次元のもののみを考える。A の表現が**既約** (irreducible) であるとは、対応する加群に自明でない部分加群がないことをいう。既約でないとき**可約** (reducible) であるという。

A の表現 $f : A \to M_n(k)$ に対して $\chi_f : A \to k$ を $\chi_f(a) = \mathrm{trace}\ f(a)$ で定め、これを f から得られる**指標** (character) という。表現 f が既約 (可約) であるとき、指標も既約 (可約) であるという。

$f : A \to M_n(k)$ が A の表現であるとき、正則行列 P に対して $f^P : A \to M_n(k)$ $(a \mapsto P^{-1}f(a)P)$ も A の表現である。このとき f と f^P は**同値な表現**であるという。これは対応する加群が同型であることと同値である。同値な表現は同一視する場合も多い。また同値な表現の指標は一致する。

A-加群 M がいくつかの既約加群の直和と同型であるとき M を**完全可約** (completely reducible) であるという。A 自身を右 A 加群と見たものを**右正則加群** (right regular representation) と呼ぶ。右正則加群が完全可約であるとき A を**半単純代数** (semisimple algebra) という。A が半単純代数ならば任意の加群は完全可約である。

定理 2.1. 代数閉体 k 上の有限次元半単純代数 A が半単純であることと A が自明でないべき零イデアルを持たないことは同値である。

定理 2.2. 代数閉体 k 上の有限次元半単純代数はいくつかの全行列環の直和に同型である。

この定理より代数閉体 k 上の有限次元半単純代数は

$$A \cong M_{n_1}(k) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(k)$$

と分解する。各直和因子への射影を π_i $(1 = 1, \cdots, r)$ とすると $\pi_i : A \to M_{n_i}(k)$ が A の既約表現の同値類の完全代表系を与える。特に A の既約表現の同値類の個数は有限である。したがって既約指標の数は有限個である。直和因子 $M_{n_i}(k)$ の単位元 e_i は A の中心的原始べき等元である。したがって既約指標に中心的原始べき等元が対応する。直和因子 $M_{n_i}(k)$ に対応する既約指標を χ_i で表すこととすると、任意の $a \in A$ に対して明らかに $\chi_i(ae_j) = \delta_{ij}\chi_i(a)$ である。

代数閉体 k 上の有限次元半単純代数 A に対して、その既約指標全体の集合を $\mathrm{Irr}(A)$ と表すことにする。また既約 A-加群の同型類の代表系を $\mathrm{IRR}(A)$ と書く。

定理 2.3. A を代数閉体 k 上の有限次元半単純代数とする。$\mathrm{Irr}(A)$ は A から k への線形写像の集合と見て一次独立である。特に k の標数が 0 ならば加群の同型類は指標で決定される。

以上、半単純代数に関する定理などは証明しない。必要ならば [14] などを見るとよいだろう。

さてアソシエーション・スキーム (X, S) の $\mathbb{C}$ 上の隣接代数を考えよう。

定理 2.4. アソシエーション・スキーム (X, S) の $\mathbb{C}$ 上の隣接代数 $\mathbb{C}S$ は半単純代数である。

Proof. 定理 2.1 を用いる。$0 \neq a = \sum_{s \in S} \alpha_s \sigma_s \in \mathbb{C}S$ に対して、ある $b \in \mathbb{C}S$ があって ab がべき零でないことを示せば十分である。$\alpha_t \neq 0$ である $t \in S$ が存在するので $a\sigma_{t^*}$ を考えれば、その対角成分はすべて $\alpha_t n_t \neq 0$ である。よってその対角成分の和は 0 ではない。一方べき零行列であるための必要十分条件はすべての固有値が 0 となることであり、そのとき対角成分の和は 0 である。よって $a\sigma_{t^*}$ はべき零でなく、主張が成り立つ。 □

定理 2.5. $\mathbb{C}S$ の任意の指標 χ と任意の $s \in S$ に対して、$\chi(\sigma_s)$ は代数的整数である。

Proof. σ_s は整数を成分とする行列なので、その固有値は代数的整数である。指標の値は σ_s のいくつかの固有値の和であるから代数的整数である。 □

写像 $1_S : \mathbb{C}S \to \mathbb{C}$ を $1_S(\sigma_s) = n_s$ で定めれば、これは $\mathbb{C}S$ の表現になる。これを (X, S) の**自明な表現** (trivial representation) という。1_S は 1 次の表現であるから、これを指標と見てもよい。これを (X, S) の**自明な指標** (trivial character) という。

$\mathrm{Irr}(\mathbb{C}S)$ を単に $\mathrm{Irr}(S)$ と書くことにする。写像 $\Gamma_S : \mathbb{C}S \to M_{n_S}(\mathbb{C})$ $(\sigma_s \mapsto \sigma_s)$ は明らかに隣接代数 $\mathbb{C}S$ の表現になる。これを (X, S) の**標準表現** (standard representation) という。このとき対応する $\mathbb{C}S$-加群の基底として、自然に X を取ることができる。よって標準表現に対応する加群を $\mathbb{C}X$ と書き、これを**標準加群** (standard module) という。(標準表現、標準加群は任意の係数環上で定義される。) また標準表現の指標を**標準指標** (standard character) といい γ_S で表すことにする。明らかに $\gamma_S(\sigma_1) = n_S$, $\gamma_S(\sigma_s) = 0$ $(1 \neq s \in S)$ である。標準指標の既約分解を考え、既約成分 χ の重複度を m_χ と表す。

$$\gamma_S = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} m_\chi \chi$$

m_χ を単に χ の**重複度** (multiplicity) という。S が例 1.3 のように有限群から得られる場合には標準表現は正則表現であり、既約指標 χ の重複度 m_χ はその次数 $\chi(1)$ に等しい。

指標の重複度に関して以下が成り立つ。

命題 2.6. $\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ について $\chi(1) \leq m_\chi$ である。特に $m_\chi \neq 0$ である。

Proof. $x \in X$ を固定する。$\varphi : \mathbb{C}S \to \mathbb{C}X$ を $\varphi(\sigma_s) = \sum_{y \in xs} y$ で定めれば、これは右 $\mathbb{C}S$-加群としての準同型で、かつ単射である。$\mathbb{C}S$, $\mathbb{C}X$ における χ の重複度が、それぞれ $\chi(1)$, m_χ であるから $\chi(1) \leq m_\chi$ である。 □

アソシエーション・スキーム (X, S) に対して、行は $\mathrm{Irr}(S)$ で、列は S で添字の付けられた行列 $(\chi(\sigma_s))$ を S の**指標表** (character table) と呼ぶ。有限群では、指標の値が共役類の上で一定であるから、指標表の列は共役類で添字を付ける。しかしアソシエーション・スキームでは共役に相当する適当な概念がないので S そのものを添字に用いる。したがって指標表は一般に正方行列ではない。しかし S が可換の場合には $|S| = |\mathrm{Irr}(S)|$ が成り立つので指標表は正方行列になる。また色々な計算に用いるために指標表に重複度を表す列を付け加える場合もある。

例 2.7 (クラス 1 のアソシエーション・スキームの指標表)**.** $(X, \{1, g\})$ をクラス 1 のアソシエーション・スキーム 例 1.2 とする。このとき、その指標

表は以下の通りである。

	1	g	m_i
1_S	1	$n_S - 1$	1
χ	1	-1	$n_S - 1$

例 2.8 (群アソシエーション・スキームの指標表)**.** 群アソシエーション・スキームの指標表は元の群の指標表から簡単に求めることができる。群アソシエーション・スキームの隣接代数は群環の中心と同型であり、その既約指標は有限群の表現でよく用いられる。

G を有限群とし χ をその既約指標とする。また C_i を G の共役類とする。このとき

$$\omega_\chi(\widehat{C_i}) = \frac{\chi(\widehat{C_i})}{\chi(1)}$$

は $Z(\mathbb{C}G)$ の既約表現で $\mathrm{Irr}(Z(\mathbb{C}G)) = \{\omega_\chi \mid \chi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{C}G)\}$ が成り立つ。

例えば 3 次対称群と、その群アソシエーション・スキームの指標表は以下の通りである。

χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
χ_3	2	-1	0

,

				m_{χ_i}
ω_1	1	2	3	1
ω_2	1	2	-3	1
ω_3	1	-1	0	4

このような操作は有限群だけでなく、後に説明する群的スキームに対して行うことができる。

$\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ に対応する $\mathbb{C}S$ の中心的原始べき等元を e_χ で表す。$\chi, \varphi \in \mathrm{Irr}(S)$ と $a \in \mathbb{C}S$ に対して $\varphi(ae_\chi) = \varphi(a)\delta_{\chi\varphi}$ である。また $1 = \sigma_1 = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} e_\chi$ である。

補題 2.9 (反転公式)**.** $u = \sum_{s \in S} \alpha_s \sigma_s \in \mathbb{C}S$ のとき

$$\alpha_s = \frac{1}{n_S n_s} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} m_\chi \chi(u\sigma_{s^*}).$$

Proof. $u\sigma_{s^*} = \sum_{t \in S} \alpha_t \sigma_t \sigma_{s^*}$ の標準指標 γ_S による値を考えると $\gamma_S(u\sigma_{s^*}) = \alpha_s n_s n_S$ となる。$\gamma_S = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} m_\chi \chi$ を代入して結果を得る。 □

命題 2.10. $\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ に対して

$$e_\chi = \frac{m_\chi}{n_S}\sum_{s\in S}\frac{1}{n_s}\chi(\sigma_{s^*})\sigma_s.$$

Proof. $e_\chi = \sum_{s\in S}\alpha_s\sigma_s$ とおいて反転公式を用いると

$$\alpha_s = \frac{1}{n_S n_s}\sum_{\varphi\in\mathrm{Irr}(S)} m_\varphi\varphi(e_\chi\sigma_{s^*}) = \frac{1}{n_S n_s} m_\chi\chi(\sigma_{s^*})$$

となる。 □

補題 2.11 (シュアーの関係式)**.** Φ_χ を $\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ を与える既約表現とし $\alpha^\chi_{\mu\nu}$ で Φ_χ の (μ,ν) 成分を表すものとする。このとき $\chi,\varphi \in \mathrm{Irr}(S)$ に対して次が成り立つ。

$$\frac{m_\chi}{n_S}\sum_{s\in S}\frac{1}{n_s}\alpha^\chi_{\mu\nu}(\sigma_{s^*})\alpha^\varphi_{\rho\tau}(\sigma_s) = \delta_{\chi\varphi}\delta_{\mu\tau}\delta_{\nu\rho}.$$

Proof. $T = \{(\chi,\mu,\nu) \mid \chi \in \mathrm{Irr}(S), 1 \le \mu,\nu \le \chi(1)\}$ の要素は $\mathbb{C}S$ の次元、すなわち $|S|$ 個ある。T と S で添字の付けられた行列

$$A = \left(\alpha^\chi_{\mu\nu}(\sigma_s)\right)_{(\chi,\mu,\nu),s}, \quad B = \left(\frac{m_\chi}{n_S n_s}\alpha^\chi_{\nu\mu}(\sigma_{s^*})\right)_{(\chi,\mu,\nu),s}$$

を考える。${}^tAB$ の (s,t)-成分を計算すると

$$\begin{aligned}\sum_{\chi,\mu,\nu}\frac{m_\chi}{n_S n_t}\alpha^\chi_{\mu\nu}(\sigma_s)\alpha^\chi_{\nu\mu}(\sigma_{t^*}) &= \sum_{\chi,\mu}\frac{m_\chi}{n_S n_t}\alpha^\chi_{\mu\mu}(\sigma_s\sigma_{t^*})\\ = \sum_{\chi}\frac{m_\chi}{n_S n_t}\chi(\sigma_s\sigma_{t^*}) &= \frac{1}{n_S n_t}\gamma_S(\sigma_s\sigma_{t^*}) = \delta_{st}\end{aligned}$$

である。よって ${}^tAB = I$ (単位行列) であり、$B{}^tA = I$ も成り立つ。$B{}^tA$ の $((\chi,\mu,\nu),(\varphi,\rho,\tau))$-成分を計算して

$$\delta_{\chi\varphi}\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\tau} = \frac{m_\chi}{n_S}\sum_{s\in S}\frac{1}{n_s}\alpha^\chi_{\nu\mu}(\sigma_{s^*})\alpha^\varphi_{\rho\tau}(\sigma_s)$$

を得る。 □

定理 2.12 (指標の (第一) 直交関係)**.** $\chi, \varphi \in \mathrm{Irr}(S)$ に対して次が成り立つ。

$$\frac{m_\chi}{n_S \chi(1)} \sum_{s \in S} \frac{1}{n_s} \chi(\sigma_s) \varphi(\sigma_{s^*}) = \delta_{\chi\varphi}.$$

Proof. 補題 2.11 より

$$\sum_{s \in S} \frac{1}{n_s} \chi(\sigma_{s^*}) \varphi(\sigma_s) = \sum_{s \in S} \sum_{\mu=1}^{\chi(1)} \sum_{\nu=1}^{\varphi(1)} \frac{1}{n_s} \alpha^\chi_{\mu\mu}(\sigma_{s^*}) \alpha^\varphi_{\nu\nu}(\sigma_s)$$

$$= \quad \delta_{\chi\varphi} \sum_{s \in S} \sum_{\mu=1}^{\chi(1)} \frac{1}{n_s} \alpha^\chi_{\mu\mu}(\sigma_{s^*}) \alpha^\chi_{\mu\mu}(\sigma_s) = \delta_{\chi\varphi} \frac{n_S \chi(1)}{m_\chi}$$

となる。 □

定理 2.12 の別証明. $\chi, \varphi \in \mathrm{Irr}(S)$ に対して

$$\delta_{\chi\varphi} \varphi(1) = \varphi(e_\chi) = \frac{m_\chi}{n_S} \sum_{s \in S} \frac{1}{n_s} \chi(\sigma_s) \varphi(\sigma_{s^*})$$

である。 □

直交関係により重複度に関する以下の公式を得る。

定理 2.13. $\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ に対して、その重複度は以下の式で与えられる。

$$m_\chi = \frac{n_S \chi(1)}{\prod_{s \in S} \frac{1}{n_s} \chi(\sigma_s) \chi(\sigma_{s^*})}$$

問 2.14. (X, S) の自明な表現 1_S の重複度 m_{1_S} は 1 であることを示せ。また 1_S に対応する中心的原始べき等元は ${n_S}^{-1} \sigma_S$ であることを示せ。

未解決問題 2.15. 一般に指標 χ が与えられたときに、それが既約かどうかを判定する方法は知られていない。直交関係などから既約性を判定する方法を作りたい。

問 2.16 (一般化された直交関係)**.** $\chi, \varphi \in \mathrm{Irr}(S)$, $a \in \mathbb{C}S$ に対して

$$\frac{m_\chi}{n_S} \sum_{s \in S} \frac{1}{n_s} \chi(a\sigma_s) \varphi(\sigma_{s^*}) = \delta_{\chi\varphi} \chi(a)$$

が成り立つことを示せ。(ヒント：$\delta_{\chi\varphi}\chi(a) = \chi(ae_\varphi)$ を計算せよ。)

例 2.17. 以下の関係行列で定義されるアソシエーション・スキームを考える。

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 5 & 5 & 6 & 6 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 4 & 6 & 3 & 5 & 4 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 6 & 4 & 5 & 3 & 6 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 3 & 0 & 5 & 2 & 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 6 & 2 & 6 & 0 & 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 6 & 2 & 4 & 0 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & 4 & 2 & 6 & 1 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 5 & 4 & 2 & 4 & 1 & 6 & 3 & 0 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 & 2 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 1 & 5 & 2 & 3 & 6 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

このアソシエーション・スキームの指標表は以下の通りである。

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	m_i
χ_1	1	1	2	2	2	2	2	1
χ_2	1	1	2	-1	-1	-1	-1	2
χ_3	1	-1	0	-1	-1	1	1	3
χ_4	2	0	-2	1	1	-1	-1	3

この指標表の列はスカラー倍を同一視しても 5 通りあり、列に関する直交関係は存在しない。また (例えば関係行列で) 与えられたアソシエーション・スキームの指標表を効率よく計算する方法は知られていないようである。

未解決問題 2.18. 有限群の指標表を求めるバーンサイド–ディクソン–シュナイダー・アルゴリズムのような効率のよい方法をアソシエーション・スキームの指標表について考察せよ。(バーンサイド–ディクソン–シュナイダー・アルゴリズムについては、例えば [16] を参照)。

定理 2.19 (可換アソシエーション・スキームの第二直交関係)**.** S が可換ならば次が成り立つ。

$$\frac{1}{n_S n_s} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} m_\chi \chi(\sigma_s)\chi(\sigma_{t^*}) = \delta_{st}.$$

Proof. S が可換だから $|S| = |\mathrm{Irr}(S)|$ である。行と列がそれぞれ $\mathrm{Irr}(S)$, S で添字付けられた行列

$$A = \left(\frac{m_\chi}{n_S n_s}\chi(\sigma_{s^*})\right), \quad B = (\chi(\sigma_s))$$

を考える。直交関係より $A^tB = I$ となるので ${}^tBA = I$ も成り立つ。(s,t)-成分を計算すれば

$$\delta_{st} = \frac{1}{n_S n_s} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} m_\chi \chi(\sigma_s)\chi(\sigma_{t^*})$$

となる。 □

定理 2.19 の別証明. 1 次の指標 χ は代数準同型であるから $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ が成り立つ。また可換性を仮定しているので S の任意の既約指標は 1 次である。標準指標 $\gamma_S = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} m_\chi \chi$ を考えれば

$$\delta_{st} n_f n_S = \gamma_S(\sigma_s \sigma_{t^*}) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} m_\chi \chi(\sigma_s \sigma_{t^*}) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} m_\chi \chi(\sigma_s)\chi(\sigma_{t^*})$$

である。 □

注意. 後に説明する群的スキームに対して第二直交関係に相当する関係が成り立つ。

有限群の複素指標では、群の元 g に対して $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ が成り立つ。これは $gg^{-1} = g^{-1}g$ より、表現行列として正規行列をとることができることによる。アソシエーション・スキームでは s^* が逆元に似た役割をするが $\sigma_s\sigma_{s^*} = \sigma_{s^*}\sigma_s$ とは限らない。また σ_s は対角化可能とも限らない。しかし、一般に $\chi(\sigma_{s^*}) = \overline{\chi(\sigma_s)}$ は成り立つ。これを示すために少し準備をする。

f を指標 χ を与える $\mathbb{C}$ 上の S の表現とする。$\overline{f} : \sigma_s \mapsto \overline{f(\sigma_s)}$ とすると $\overline{f}$ も S の表現で、f が既約ならば $\overline{f}$ も既約である。対応する指標は $\overline{\chi} : \sigma_s \mapsto \overline{\chi(\sigma_s)}$ である。$\overline{f}$ を f の**複素共役な表現**といい、$\overline{\chi}$ を χ 複素共役な指標という。次に $\widetilde{f} : \sigma_s \mapsto {}^tf(\sigma_{s^*})$ とおく。

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(\sigma_s\sigma_t) &= \widetilde{f}\left(\sum_{u\in S} p_{st}^u \sigma_u\right) = \sum_{u\in S} p_{st}^u \widetilde{f}(\sigma_u) = \sum_{u\in S} p_{st}^u \; {}^tf(\sigma_{u^*}) \\
&= {}^tf\left(\sum_{u\in S} p_{st}^u \sigma_{u^*}\right) = {}^tf\left(\sum_{u\in S} p_{t^*s^*}^{u^*} \sigma_{u^*}\right) = {}^tf(\sigma_{t^*}\sigma_{s^*}) \\
&= {}^t(f(\sigma_{t^*})T(\sigma_{s^*})) = {}^tf(\sigma_{s^*})^tf(\sigma_{t^*}) = \widetilde{f}(\sigma_s)\widetilde{f}(\sigma_t)
\end{aligned}$$

が成り立つので $\widetilde{f}$ も S の表現であり、対応する指標 $\widetilde{\chi}$ について $\widetilde{\chi}(\sigma_s) = \chi(\sigma_{s^*})$ である。$\widetilde{f}$ を f の**反傾表現** (contragredient representation) という。f が既約なら $\widetilde{f}$ も既約である。

次の定理が目標であった。

定理 2.20. 複素指標 χ について $\chi(\sigma_{s^*}) = \overline{\chi(\sigma_s)}$ が成り立つ。

Proof. 既約指標 χ について示せば十分である。$\overline{\chi}$ と $\widetilde{\chi}$ について

$$\sum_{s\in S} \frac{1}{n_s}\overline{\chi}(\sigma_s)\widetilde{\chi}(\sigma_{s^*}) = \sum_{s\in S} \frac{1}{n_s}\overline{\chi(\sigma_s)}\chi(\sigma_s) > 0$$

であるから、$\overline{\chi}$ と $\widetilde{\chi}$ が既約であることと直交関係によって $\overline{\chi} = \widetilde{\chi}$ である。よって主張は成り立つ。 □

次に指標の値に注目する。指標の値の絶対値の評価として次の結果を得る。

定理 2.21. 複素指標 χ について $|\chi(\sigma_s)| \leq n_s\chi(1)$ が成り立つ。

証明のためにペロン–フロベニウスの定理を説明する。

Γ を有限有向グラフとする。すなわち Γ は有限な点集合 $V\Gamma$ と辺集合 $E\Gamma$ からなる。ここで辺集合とは、単に $V\Gamma \times V\Gamma$ の部分集合を意味する。$x, y \in V\Gamma$ が**連結**であるとは、ある非負整数 ℓ と $V\Gamma$ の元の列

$$x = x_0, x_1, \cdots, x_\ell = y$$

が存在して $(x_{i-1}, x_i) \in E\Gamma$ または $(x_i, x_{i-1}) \in E\Gamma$ $(i = 1, 2, \cdots, \ell)$ となることとする。また**強連結**であるとは、$(x_{i-1}, x_i) \in E\Gamma$ $(i = 1, 2, \cdots, \ell)$ となることとする。連結であるという関係は同値関係である。その同値類 (およびそれらの点を両端とする辺) を Γ の**連結成分**という。Γ が一つの連結成分であるとき Γ は**連結**であるという。$V\Gamma$ の任意の順序対 x, y が強連結であるとき Γ を**強連結**であるという。

定理 2.22 (ペロン–フロベニウスの定理 [26, Theorem 8.4.4])**.** M を非負実数を成分とする n 次正方行列とする。有限有向グラフを以下のように定める。点集合を $V\Gamma = \{1, \cdots, n\}$ とし、辺集合を

$$E\Gamma = \{(i, j) \mid M_{ij} > 0\}$$

とする。グラフ Γ が強連結であるとする。このとき ρ を M の固有値の絶対値の最大値とすると ρ は M の重複度 1 の固有値である (すなわち固有多項式の単根である)。また ρ に対応する固有ベクトルとして非負実数のみを成分として持つものを取ることができる。逆に、そのような固有ベクトルは ρ に対応するものに限る。

この定理の ρ を**フロベニウス根**という。

補題 2.23. (X,S) をアソシエーション・スキームとし $s \in G$ とする。σ_s を隣接行列とする有限有向グラフの連結成分は強連結である。

Proof. σ_s を隣接行列とする有限有向グラフを Γ とする。$V\Gamma = X$ であり $E\Gamma = s$ である。$x, y \in X$ が連結ならば強連結であることを示せばよい。このためには $(x,y) \in s$ ならば y, x が強連結であることを示せばよい。$(x,y) \in s$ とする。

$$\begin{aligned} ys^0 &= \{y\} \\ ys^\ell &= \bigcup_{z \in ys^{\ell-1}} zs \\ T &= \bigcup_{\ell=0}^{\infty} ys^\ell \end{aligned}$$

とおく (T は有限集合である)。このとき $x \in T$ を示せばよい。$E_T = \{(u,v) \in s \mid u \in T, v \in T\}$ とおいて E_T に含まれる辺の数を数える。$u \in T$, $(u,v) \in s$ ならば T の定義から $v \in T$ である。よって

$$|E_T| = \sum_{u \in T} |\{v \in T \mid (u,v) \in s\}| = n_s|T|$$

である。一方 $v \in T$, $(u,v) \in s$ とすると (u が T に含まれるかどうかは分からないので)

$$|E_T| = \sum_{v \in T} |\{u \in T \mid (u,v) \in s\}| \leq n_s|T|$$

である。この等号が成立するから $v \in T$, $(u,v) \in s$ ならば $u \in T$ であり、特に v として y を考えれば $x \in T$ である。 □

定理 2.21 の証明. $\chi(\sigma_s)$ は $\chi(1)$ 個の σ_s の固有値の和だから、任意の固有値 ξ に対して $|\xi| \leq n_s$ を示せばよい。σ_s の固有値は σ_s のある連結成分に対応している。よってはじめから σ_s は連結であると仮定してよい。このとき σ_s は強連結だからフロベニウス根をもつ。一方 σ_s は各行、各列に n_s 個の 1 を含むので n_s は σ_s の固有値であり、また固有ベクトルとしてすべての成分が 1 であるものを取ることができる。よって n_s は σ_s のフロベニウス根であり、絶対値最大の固有値である。 □

f を S の体 k 上の表現とする。k の体としての自己同型 τ に対して f^τ を $f^\tau(\sum_{s \in S} a_s\sigma_s) = \sum_{s \in S} a_s f(\sigma_s)^\tau$ で定めれば f^τ はまた S の表現となる。このとき、係数には τ を作用させないので $f^\tau(\sum_{s \in S} a_s\sigma_s) = (\sum_{s \in S} a_s f(\sigma_s))^\tau$

ではないことに注意する。f^τ と f は**代数共役** (algebraically conjugate) であるという。特に f が既約ならば f^τ も既約である。指標に対しても同様に代数共役を定義することが出来る。代数共役である二つの複素既約指標の重複度は等しい。

有限群の指標表においては、代数共役は既約指標の置換のみでなく、その共役類の置換も引き起こす。しかしアソシエーション・スキームにおいてはこれは正しくない。

例 2.24. 関係行列

$$\begin{pmatrix}
0&1&1&1&1&1&1&2&2&2&3&3&3&3\\
1&0&1&1&1&1&1&3&3&2&2&2&3&3\\
1&1&0&1&1&1&1&2&3&3&3&2&2&3\\
1&1&1&0&1&1&1&2&3&3&2&3&3&2\\
1&1&1&1&0&1&1&3&2&3&3&2&3&2\\
1&1&1&1&1&0&1&3&3&2&3&3&2&2\\
1&1&1&1&1&1&0&3&2&3&2&3&2&3\\
2&3&2&2&3&3&3&0&1&1&1&1&1&1\\
2&3&3&3&2&3&2&1&0&1&1&1&1&1\\
2&2&3&3&3&2&3&1&1&0&1&1&1&1\\
3&2&3&2&3&3&2&1&1&1&0&1&1&1\\
3&2&2&3&2&3&3&1&1&1&1&0&1&1\\
3&3&2&3&3&2&2&1&1&1&1&1&0&1\\
3&3&3&2&2&2&3&1&1&1&1&1&1&0
\end{pmatrix}$$

で定義されるアソシエーション・スキームの指標表は

	s_0	s_1	s_2	s_3	m_i
χ_1	1	6	3	4	1
χ_2	1	6	-3	-4	1
χ_3	1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	6
χ_4	1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	6

であり、その列は代数共役で閉じていない。

注意. 指標表の列が代数共役で閉じていることと、クライン・パラメーター (§4.1) がすべて有理数であることが同値であることが知られている。

2.2 $\mathbb{C}S$ の中心

指標理論において、隣接代数の中心は重要な役割をもっている。ここでは [23] に従ってその理論を解説する。

写像 $\zeta : \mathbb{C}S \to \mathbb{C}S$ を

$$\zeta(a) = \sum_{s \in S} \frac{1}{n_s} \sigma_{s^*} a \sigma_s$$

で定義する。

補題 2.25. 任意の $a \in \mathbb{C}S$ に対して $\zeta(a) \in Z(\mathbb{C}S)$ である。

Proof. 直接計算することによって

$$\begin{aligned}
\zeta(a)\sigma_s &= \sum_{t \in S} \frac{1}{n_t} \sigma_{t^*} a \sigma_t \sigma_s = \sum_{t \in S} \frac{1}{n_t} \sigma_{t^*} a \sum_{u \in S} p_{ts}^u \sigma_u \\
&= \sum_{t \in S} \sum_{u \in S} \frac{1}{n_t} p_{ts}^u \sigma_{t^*} a \sigma_u = \sum_{u \in S} \sum_{t \in S} \frac{1}{n_u} p_{su^*}^{t^*} \sigma_{t^*} a \sigma_u \\
&= \sum_{u \in S} \frac{1}{n_u} \sigma_s \sigma_{u^*} a \sigma_u = \sigma_s \zeta(a)
\end{aligned}$$

である。 □

補題 2.26. $a \in Z(\mathbb{C}G)$ であるならば $\zeta(a) = \displaystyle\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} \frac{n_S \chi(a)}{m_\chi} e_\chi$ である。

Proof. $v = \zeta(1) = \sum_{s \in S} \frac{1}{n_s} \sigma_{s^*} \sigma_g$ とおく。reg を $\mathbb{C}S$ の正則表現の指標とする。このとき $\mathrm{reg}(\sigma_s) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} \chi(1)\chi(\sigma_s) = \sum_{s \in S} p_{ts}^s$ である。よって

$$\begin{aligned}
v &= \sum_{s \in S} \frac{1}{n_s} \sum_{t \in S} p_{ss^*}^t \sigma_t = \sum_{s \in S} \sum_{t \in S} \frac{1}{n_t} p_{t^*s}^s \sigma_t \\
&= \sum_{t \in S} \frac{1}{n_t} \mathrm{reg}(\sigma_{t^*}) \sigma_t = \sum_{t \in S} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} \frac{1}{n_t} \chi(1)\chi(\sigma_{t^*}) \sigma_t \\
&= \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} \frac{n_S \chi(1)}{m_\chi} e_\chi.
\end{aligned}$$

である。$a \in Z(\mathbb{C}S)$ であるから $\zeta(a) = av$ である。したがって $ae_\chi = \frac{\chi(a)}{\chi(1)} e_\chi$ より結果を得る。 □

定理 2.27. $\zeta(\mathbb{C}S) = Z(\mathbb{C}S)$ である。

Proof. 任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ に対してある $a \in \mathbb{C}S$ が存在して $\zeta(a) = e_\chi$ となることを示せばよいが、補題 2.26 より $\zeta(\frac{m_\chi}{n_S} e_\chi) = e_\chi$ である。 □

注意. 一般にフロベニウス代数 (§5.7) A の双対基 $\{a_i\}, \{b_i\}$ に対して $c : A \to A$ $(c(v) = \sum_i a_i v b_i)$ を**カシミール作用素** (Casimir operator) という。A が分離代数のとき $c(A) = Z(A)$ が成り立つ。$\mathbb{C}S$ はフロベニウス代数で $\{\sigma_s\}$, $\{\frac{1}{n_s}\sigma_{s^*}\}$ がその双対基となるので、上記の ζ はカシミール作用素の一つである。また $v = \zeta(1) = \sum_{s \in S} \frac{1}{n_s}\sigma_{s^*}\sigma_s$ は**カシミール元** (Casimir element) と呼ばれる [23]。

Chapter 3

閉部分集合と剰余スキーム

3.1 定義と基本性質

有限群の部分群と剰余群に相当する閉部分集合と剰余スキームを定義し、その基本的な性質を説明する。そのためにまず複合積を定義する。

(X,S) をアソシエーション・スキームとする。$s,t\in S$ に対して

$$st=\{u\in S\mid p_{st}^{u}\neq 0\}$$

とおき、これを s と t の**複合積** (complex product) という。隣接代数における積とは異なるので注意が必要である。また $T\subset S$ に対して $T^*=\{t^*\mid t\in T\}$ という記号も用いる。$p_{st}^{u}=p_{t^*s^*}^{u^*}$ なので

$$(st)^*=t^*s^*$$

が成り立つ。また $T,U\subset S$ に対して

$$TU=\bigcup_{t\in T}\bigcup_{u\in U}tu$$

とおき、これも複合積と呼ぶ。

$\phi\neq T\subset S$ が**閉部分集合** (closed subset) であるとは $TT^*\subset T$ であることとする (S が群であれば T が部分群であることを意味している)。また、任意の $s\in S$ に対して $1\in ss^*$ であるから T が閉部分集合ならば $1\in T$ であり、したがって $TT^*\supset T1=T$ である。よって $TT^*=T$ が成り立つ。

命題 3.1. T が S の閉部分集合であることと $TT\subset T$ であることは同値である (有限群ならば $TT\subset T$ が部分群であることと同値であることに対応している)。

Proof. T が閉部分集合であるとする。このとき $T = TT^* = (TT^*)^* = T^*$ であるから $TT = T$ である。

逆に $TT \subset T$ とする。$T^* \subset T$ であることを示せばよい。$\sigma_T = \sum_{t \in T} \sigma_t$ を隣接行列とする (ループを含む) 有向グラフを考え、補題 2.23 の証明と同様の議論をすれば、このグラフの連結成分は強連結、すなわち $T^* \subset T$ となる。 □

$T \subset S$ に対して T を含む最小の閉部分集合は存在する。これを $\langle T \rangle$ と書いて T **の生成する閉部分集合**という。

アソシエーション・スキームの閉部分集合は、明らかにアソシエーション・スキームではない。しかしアソシエーション・スキーム (X, S) とその閉部分集合 T に対して、次のように部分スキームを定義できる。$x \in X$ を一つ固定する。$X' = xT$ とし、$s \in S$ に対して $s' = \{(y, z) \in X' \times X' \mid (y, z) \in s\}$ とする。このとき $S' = \{s' \mid s \in S, s' \neq \phi\}$ とすれば (X', S') はアソシエーション・スキームとなる。これを (X, S) の閉部分集合 T と $x \in X$ に関する**部分スキーム** (subscheme) といい $(X, S)_{xT}$ と書く。部分スキームは、一般に同型を除いても一意的ではなく $x \in X$ の取り方に依存する。しかし部分スキームは代数的には同型となる。

問 3.2. $(X, S)_{xT}$ がアソシエーション・スキームになることを示せ。

例 3.3. (X, S) をアソシエーション・スキームとする。各 $x \in X$ に対してアソシエーション・スキーム (Y_x, T_x) が存在し、$\{(Y_x, T_x) \mid x \in X\}$ は互いに代数的に同型であるとする。$T_x = \{t_0^{(x)}, \cdots, t_r^{(x)}\}$ として、この番号付けが代数的同型を与えるものとする。Z を Y_x $(x \in X)$ の共通部分をもたない和集合とする。$z \in Z$ に対して $z \in Y_x$ となる $x \in X$ を $x(z)$ と書くことにする。$1 \neq s \in S$ に対して Z 上の関係 $\widetilde{s}$ を

$$\widetilde{s} = \{(z, z') \mid (x(z), x(z')) \in s\}$$

と定める。また $i \in \{0, 1, \cdots, r\}$ に対して

$$\widehat{t_i} = \{(z, z') \mid x(z) = x(z'),\ (z, z') \in t_i^{x(z)}\}$$

とする。このとき $U = \{\widetilde{s} \mid 1 \neq s \in S\} \cup \{\widehat{t_i} \mid i = 0, 1, \cdots, r\}$ とすれば (Z, U) はアソシエーション・スキームである。また $T = \{\widehat{t_i} \mid i = 0, 1, \cdots, r\}$ は (Z, U) の閉部分集合である。(Y_x, T_x) は (Z, U) の T と $z \in Y_x$ に関する部分スキームであり、互いに同型とは限らない。特に (Y_x, T_x) をすべて同型なものと定めたときがレス積であり、(Z, U) はレス積と代数的に同型であることがすぐに分かる。

T が (X,S) の閉部分集合であるとき

$$\mathbb{C}T = \bigoplus_{t\in T} \mathbb{C}\sigma_t$$

は隣接代数 $\mathbb{C}S$ の部分代数となる。T はアソシエーション・スキームではないので $\mathbb{C}T$ はアソシエーション・スキームの隣接代数ではない。しかし、任意の $x \in X$ に関する部分スキーム $(X,S)_{xT}$ の隣接代数は自然な対応で $\mathbb{C}T$ と同型になる。したがって $\mathbb{C}T$ を隣接代数と思い、その理論を適用することが出来る。

S の閉部分集合 T が**正規閉部分集合** (normal closed subset) であるとは、任意の $s \in S$ に対して $sT = Ts$ が成り立つこととする。またこのとき $T \lhd S$ または $S \rhd T$ と書く。任意の $s \in S$ に対して $sTs^* = T$ が成り立つとき T を**強正規閉部分集合** (strongly normal closed subset) といい $T \lhd^\sharp S$ または $S \rhd^\sharp T$ と書く。正規閉部分集合と強正規閉部分集合は、どちらもある意味で有限群の正規部分群に対応している。また可換アソシエーション・スキームの閉部分集合は常に正規であるが、強正規であるとは限らない。

命題 3.4. 強正規閉部分集合は正規閉部分集合である。

Proof. 任意の $s \in S$ に対して $1 \in ss^*$ である。$s^*Ts \subset T$ とすると

$$Ts \subset ss^*Ts \subset sT$$

となる。逆も同様である。 □

次に剰余スキームを定義しよう。

補題 3.5. T をアソシエーション・スキーム (X,S) の閉部分集合とする。$x, y \in X$ に対して $xT = yT$ であることと $xT \cap yT \neq \phi$ であることは同値である。

Proof. $z \in xT \cap yT$ とする。このとき $(x,z) \in t_1$, $(y,z) \in t_2$ となる $t_1, t_2 \in T$ がある。$x \in yt_2t_1^*$ より $xT \subset yT$ であり、また $y \in xt_1t_2^*$ より $yT \subset xT$ である。逆は明らか。 □

この補題によって X はいくつかの共通部分のない部分集合の和集合に分割される。$X/T = \{xT \mid x \in X\}$ とおく。$s \in S$ に対して

$$\begin{aligned} s^T &= \{(xT, yT) \mid y \in xTsT\} \\ &= \{(xT, yT) \mid (x_0, y_0) \in s \text{ for some } x_0 \in xT \text{ and } y_0 \in yT\} \end{aligned}$$

とおく。

補題 3.6. T をアソシエーション・スキーム (X,S) の閉部分集合とする。$s,u\in S$ に対して次は同値である。

(1) $s^T=u^T$.

(2) $s^T\cap u^T\neq\phi$.

(3) $TsT=TuT$.

(4) $TsT\cap TuT\neq\phi$.

Proof. (1) $\Longrightarrow$ (2) と (3) $\Longrightarrow$ (4) は明らか。

(2) $\Longrightarrow$ (3) を示す。$(xT,yT)\in s^T\cap u^T$ とする。このとき $x_0,x_1\in xT$, $y_0,y_1\in yT$ があって $(x_0,y_0)\in s$, $(x_1,y_1)\in u$ である。また (x_0,x_1), $(y_1,y_0)\in\bigcup_{t\in T}t$ であるから $s\in TuT$ となり T が閉部分集合なので $TsT\subset TuT$ である。逆の包含関係も同様に示される。

(4) $\Longrightarrow$ (1) を示す。$v\in TsT\cap TuT$ とする。また $(x,y)\in v$ とする。このとき $(xT,yT)\in s^T\cap u^T$ である。前と同様の議論で $s\in TuT$ となる。任意に $(aT,bT)\in s^T$ をとる。このときある $a_0\in aT$, $b_0\in bT$ があって $(a_0,b_0)\in s$ である。$b_0\in a_0s\subset a_0TuT$ であるから、ある $a_1\in a_0T=aT$, $b_1\in b_0T=bT$ があって $(a_1,b_1)\in u$ となる。よって $(aT,bT)\in u^T$ となり $s^T\subset u^T$ である。同様に $u^T\subset s^T$ も成り立つ。 □

この補題によって $X/T\times X/T$ はいくつかの (共通部分のない) 部分集合の和集合に分割される。$S/\!\!/T=\{s^T\mid s\in S\}$ とおく。また S も部分集合 TsT たちの (共通部分のない) 部分集合の和集合に分割される。

定理 3.7. $(X,S)^T=(X/T,S/\!\!/T)$ はアソシエーション・スキームである。

Proof. $1^T=\{(xT,xT)\mid x\in X\}$, $(s^T)^*=(s^*)^T$ は明らかである。$s,u,v\in S$ に対して $(xT,yT)\in v^T$ ならば

$$|(xT)s^T\cap u^T(yT)|$$

が $(xT,yT)\in v^T$ の取り方によらないことを示せばよい。ある $x_0\in xT$, $y_0\in yT$ があって $(x_0,y_0)\in v$ となるから、はじめから $(x,y)\in v$ としてよい。

$$W=xTsT\cap TvTy$$

とおくと

$$|W|=\sum_{a\in TsT}\sum_{b\in TuT}p_{ab}^v$$

であり、これは $(x,y)\in v$ の取り方によらない。一方

$$z\in W \iff zT\in (xT)s^T\cap u^T(yT)$$

が成り立つので

$$|(xT)s^T\cap u^T(yT)|=\frac{|W|}{n_T}$$

となり、これは $(xT,yT)\in v^T$ の取り方によらない。 □

この $(X,S)^T$ を S の T による**剰余スキーム** (factor scheme)、または**商スキーム** (quotient scheme) という。

定理 3.7 の証明中に示したことを補題としてまとめておく。

補題 3.8. (X,S) をアソシエーション・スキームとし T をその閉部分集合とする。剰余スキーム $(X,S)^T$ について以下が成り立つ。

(1) $1^T=\{(xT,xT)\mid x\in X\}$ であり、任意の $s\in S$ に対して $(s^T)^*=(s^*)^T$ である。

(2) $(X,S)^T$ の構造定数について $p_{s^Tu^T}^{v^T}=\frac{1}{n_T}\sum_{a\in TsT}\sum_{b\in TuT}p_{ab}^v$ である。

(3) 任意の $s\in S$ について $n_{TsT}=n_Tn_{s^T}$ である。

Proof. (1), (2) は定理 3.7 の証明中で示した。(3) は (2) で $s=u^*$, $v=1$ とおいて得られる。 □

例 3.9. 閉部分集合と剰余スキームの具体例を示す。以下は有限群 $C_2\times C_3(\cong C_6)$ と S_3 の正則置換表現から得られるアソシエーション・スキームの関係行列である。

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0&1&2&3&4&5\\ 1&0&3&2&5&4\\ \hline 4&5&0&1&2&3\\ 5&4&1&0&3&2\\ \hline 2&3&4&5&0&1\\ 3&2&5&4&1&0 \end{array}\right),\qquad \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0&1&2&3&4&5\\ 1&0&4&5&2&3\\ \hline 2&3&0&1&5&4\\ 4&5&1&0&3&2\\ \hline 3&2&5&4&0&1\\ 5&4&3&2&1&0 \end{array}\right)$$

このように行と列をうまく分割すると、対角線上のブロックには 0 と 1 しか現れていないことが分かる。このような分割があるとき $T=\{s_0,s_1\}$ は閉部分集合である。

このときの剰余スキームは以下のように簡単に求めることができる。上のような分割の各ブロックを一つの成分と見て、同じ数字を含むものは同じであるとする。適当に番号を付ければ以下の関係行列を得る。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

T が正規閉部分集合であるとこと、上記の各ブロック毎に、同じ数が各行、各列に同じ数ずつ現れる、ということは同値である。したがって $C_2 \times C_3$ では T は正規で、S_3 では T は正規ではないことが読み取れる。

例 3.10. 群の剰余群は正規部分群に対してのみ定義されるが、アソシエーション・スキームの剰余スキームはその閉部分集合が正規であることを必要としない。有限群 G を例 1.3 によってアソシエーション・スキーム (G, G) と見る。このとき部分群 H は閉部分集合となる。(G, G) の H による剰余スキーム $(G, G)^H$ は剰余類の集合 $H \setminus G$ への G の作用によって得られるシュアー的スキームと同型である。

逆に可移置換群 G から得られるシュアー的スキームは、その 1 点の固定部分群 H によって上のように構成される剰余スキームと同型である。

次は閉部分集合の定義の代数的な言い換えである。

命題 3.11. $\phi \neq T \subset S$ が S の閉部分集合であることと $e_T = \frac{1}{n_T}\sigma_T (\in \mathbb{C}S)$ がべき等元であることは同値である。

証明のために少し準備をしよう。$\alpha = \sum_{s \in S} \alpha_s \sigma_s \in \mathbb{C}S$ に対して $\mathrm{Supp}(\alpha) = \{s \in S \mid \alpha_s \neq 0\}$ とする。$\mathbb{C}S$ の構造定数が非負であることに注意する。

補題 3.12. $\alpha = \sum_{s \in S} \alpha_s \sigma_s$, $\beta = \sum_{s \in S} \beta_s \sigma_s$ とし、任意の $s \in S$ に対して α_s, β_s は非負の実数とする。このとき $\mathrm{Supp}(\alpha\beta) = \mathrm{Supp}(\alpha)\mathrm{Supp}(\beta)$ が成り立つ。

命題 3.11 の証明. e_T がべき等元であるとする。このとき

$$T = \mathrm{Supp}(e_T) = \mathrm{Supp}(e_T e_T) = \mathrm{Supp}(e_T)\mathrm{Supp}(e_T) = TT$$

となるので T は閉部分集合である。

逆に T を閉部分集合とする。$x, y \in X$ に対して

$$(\sigma_T)_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{if } (x, y) \in \bigcup_{t \in T} t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。また

$$(\sigma_T)^2{}_{xy} = |xT \cap Ty| = |xT \cap yT| = n_T \delta_{xT,yT}$$

であり $xT = yT$ であることと $(x,y) \in \bigcup_{t\in T} t$ であることは同値なので e_T はべき等元となる。 □

命題 3.13. $\phi \neq T \subset S$ が S の正規閉部分集合であることと $e_T = \frac{1}{n_T}\sigma_T$ が $\mathbb{C}S$ の中心的べき等元であることは同値である。

Proof. e_T が中心的べき等元ならば $s \in S$ に対して

$$sT = \mathrm{Supp}(\sigma_s\sigma_T) = \mathrm{Supp}(\sigma_T\sigma_s) = Ts$$

となり $T \lhd S$ である。

逆に $T \lhd S$ とする。$x, y \in X$, $s \in S$ に対して

$$sT \cap sy \neq \phi \iff y \in xTs = xsT \iff xs \cap Ty \neq \phi$$

が成り立つ。$(\sigma_s\sigma_T)_{xy} = |xs \cap Ty|$, $(\sigma_T\sigma_s)_{xy} = |xT \cap sy|$ なので $(\sigma_s\sigma_T)_{xy} = 0$ であることと $(\sigma_T\sigma_s)_{xy} = 0$ であることは同値である。

$xs \cap Ty \neq \phi$ とする。このとき $|xs \cap Ty| = |xT \cap sy|$ を示せばよい。

$$X = Ty_1 \cup Ty_2 \cup \cdots \cup Ty_r$$

を共通部分のない X の分割とする。

$$xs = \bigcup_{xs\cap Ty_i \neq \phi} (xs \cap Ty_i)$$

と xs を分割する。$xs \cap Ty_i \neq \phi$ のとき、$y_i' \in xsg \cap Ty_i$ とすれば $y_i' \in xs$, $Ty_i = Ty_i'$ である。よって

$$|xs \cap Ty_i| = |xs \cap Ty_i'| = \sum_{t\in T} p_{st}^s$$

は $s \in S$ だけで決まる数である。また $xs \cap Ty_i \neq \phi$ となることは、剰余スキーム $(X,S)^T$ で $y_iT \in (xT)s^T$ となることと同値であり、よって $xs \cap Ty_i \neq \phi$ となる i は n_{s^T} 個ある。以上より

$$n_s = |xs| = n_{s^T}|xs \cap Ty|$$

が成り立つ。同様にして $n_s = n_{s^T}|xT \cap sy|$ が成り立ち、主張が成り立つ。 □

後で用いるために証明の中で示したことを補題としてまとめておく。

補題 3.14. (X, S) をアソシエーション・スキームとし T をその正規閉部分集合とする。$s \in S$ に対して $\sigma_s \sigma_T = \sigma_T \sigma_s = \frac{n_s}{n_{s^T}} \sigma_{TsT}$ が成り立つ。

Proof. 命題 3.13 の証明中の記号を用いる。$(x, y) \in u$ とし $|xs \cap Ty| \neq 0$ とする。このとき $u \in TsT$ である。逆に $u \in TsT$ なら $|xs \cap Ty| \neq 0$ であることも明らか。よって命題 3.13 の証明より主張が成り立つ。 □

任意の $s \in S$ について $n_s = 1$ であるとき (X, S) を**細スキーム** (thin scheme) という。細スキームは例 1.3 のようにして得られ、よって本質的に有限群と思うことができる。閉部分集合 T についても $n_t = 1$ が任意の $t \in T$ に対して成り立つとき、それを**細閉部分集合** (thin closed subset) という。

命題 3.15. アソシエーション・スキーム (X, S) と閉部分集合 T に対して $(X, S)^T$ が細スキームであることと $T \lhd^\sharp S$ であることは同値である。

この命題は次の補題から明らかである。

補題 3.16. S の閉部分集合 T と $s \in S$ に対して $n_{s^T} = 1$ であることと $s^* T s \subset T$ であることは同値である。

Proof. まず $n_{s^T} = 1$ とする。$u \in s^* T s$, $(x, y) \in u$ とする。このとき、ある $a, b \in X$ があって $a \in xs^*$, $b \in aT \cap sy$ である。$b \in aT$ より $aT = bT$ である。また $(a, x) \in s$ より $(aT, xT) \in s^T$ であり、$(a, y) \in s$ より $(aT, yT) = (bT, yT) \in s^T$ である。$n_{s^T} = 1$ より $xT = yT$ で、すなわち $u \in T$ である。

次に $s^* T s \subset T$ とする。(xT, yT), $(xT, zT) \in s^T$ とする。ある $x_0, x_1, y_0, z_0 \in X$ があって $x_0 \in xT$, $x_1 \in xT$, $y_0 \in yT$, $z_0 \in zT$, $(x_0, y_0), (x_1, z_0) \in s$ である。このとき $z_0 \in y_0 s^* T s \subset y_0 T$ であり、よって $z \in yT$、すなわち $yT = zT$ が成り立ち $n_{s^T} = 1$ である。 □

アソシエーション・スキーム (X, S) に対して

$$\mathbf{O}^\vartheta(S) = \bigcap_{T \lhd^\sharp S} T$$

とおいて、これを S の**細剰余** (thin residue) という。

定理 3.17. $\mathbf{O}^\vartheta(S) \lhd^\sharp S$ であり、また

$$\mathbf{O}^\vartheta(S) = \left\langle \bigcup_{s \in S} s^* s \right\rangle$$

が成り立つ。

Proof. 閉部分集合の共通部分はまた閉部分集合なので $\mathbf{O}^\vartheta(S)$ は閉部分集合である。任意の $s \in S$ に対して

$$s^*\mathbf{O}^\vartheta(S)s = s^*\left(\bigcap_{T \lhd^\sharp S} T\right)s = \bigcap_{T \lhd^\sharp S} s^*Ts \subset \bigcap_{T \lhd^\sharp S} T = \mathbf{O}^\vartheta(S)$$

となるから $\mathbf{O}^\vartheta(S) \lhd^\sharp S$ である。

$U = \left\langle \bigcup_{s \in S} s^*s \right\rangle$ とおく。任意の $s \in S$ に対して $s^*s \subset s^*\mathbf{O}^\vartheta(S)s \subset \mathbf{O}^\vartheta(S)$ であるから $U \subset \mathbf{O}^\vartheta(S)$ である。あとは $U \lhd^\sharp S$ を示せばよい。

$t \in s^*s$ とする。$v \in S$ に対して $v^*tv \subset v^*s^*sv$ だから、まず $v^*s^*sv \subset U$ を示す。$w \in sv$ に対して $s \in wv^*$ であるから $w^*sv \subset w^*wv^*v \subset U$ である。$w^* \in (sv)^* = v^*s^*$ を任意にとっているから $v^*s^*sv \subset U$ が成り立つ。

一般には $t_1t_2\cdots t_r,\ \ t_i \in s_i^*s_i$ と $u \in S$ に対して $u^*t_1\cdots t_ru \subset U$ を示せばよい。$u^*t_iu \subset U$ なので

$$u^*t_1\cdots t_ru \subset (u^*t_1u)(u^*t_2u)\cdots(u^*t_ru) \subset U$$

である。 □

この定理から $S/\!\!/\mathbf{O}^\vartheta(S)$ は細スキームであり、本質的に有限群である。また任意の強正規閉部分集合 T は $\mathbf{O}^\vartheta(S)$ を含む。アソシエーション・スキームに対しても、いわゆる同型定理 [42, Theorem 1.7.6] は成り立つので、強正規閉部分集合とは、単に有限群 $S/\!\!/\mathbf{O}^\vartheta(S)$ の正規部分群の逆像のことである。

細剰余とは相対的に

$$\mathbf{O}_\vartheta(S) = \{s \in S \mid n_s = 1\}$$

を**細根基** (thin radical) というが、このノートでは必要としない。

注意. 細根基 $\mathbf{O}_\vartheta(S)$ は一般に S の閉部分集合ではあるが正規閉部分集合ではない。例 2.17 がそのような例になっている。

未解決問題 3.18. 自明でない閉部分集合をもたないスキームを**原始的スキーム** (primitive scheme) という。また自明でない正規閉部分集合をもたないスキームを**単純スキーム** (simple scheme) という。例えば非可解有限単純群は自明でない部分群はもつが自明でない正規部分群をもたないので、それによって定義される細スキームは単純ではあるが原始的ではない。しかし可解群によって定まる細スキームについては、それが単純であることと原始的であることは同値である。よって可解群に似た性質をもつと思われるスキームに対して、この同値性が成り立つことが期待される。どのような性質をもつスキームに対して、この同値性は成り立つであろうか。例えば、これが素数べき位数をもつスキームに対して成立するかどうかは示されていない。

3.2 剰余スキームの指標

アソシエーション・スキームの研究が難しいことの一つの原因は、その部分スキームや剰余スキームと元のアソシエーション・スキームの構造の間の関係があまり研究されておらず、したがって帰納法などの議論がしにくいことにある。ここでは剰余スキーム、特に正規閉部分集合による剰余スキームの表現を考える。

いくつかの準備をしよう。

補題 3.19. (X, S) をアソシエーション・スキームとし T, U をその閉部分集合とする。$s \in S$ に対して $\sigma_T\sigma_s\sigma_U = \sum_{t\in S} \alpha_t\sigma_t$ とすると

$$\alpha_t = \begin{cases} \alpha_s, & \text{if } t \in TsU, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。

Proof. $t \notin TsU$ ならば $\alpha_t = 0$ であることは明らかなので $t \in TsU$ とする。$(x, y) \in t$ に対して

$$\alpha_t = ((\sigma_T\sigma_s)\sigma_U)_{xy} = \sum_{z\in X}(\sigma_T\sigma_s)_{xz}(\sigma_U)_{zy} = \sum_{z\in yU}(\sigma_T\sigma_s)_{xz} = \sum_{z\in yU}|xT \cap sz|$$

である。また、ある $x_0 \in xT$ と $y_0 \in yU$ があって $(x_0, y_0) \in s$ となる。このとき $xT = x_0T$, $yU = y_0U$ であるから

$$((\sigma_T\sigma_s)\sigma_U)_{xy} = \sum_{z\in yU}|xT \cap sz| = \sum_{z\in y_0U}|x_0T \cap sz| = (\sigma_T\sigma_s\sigma_U)_{x_0y_0}$$

が成り立ち $\alpha_t = \alpha_s$ である。 □

T を (X, S) の閉部分集合とすると e_T はべき等元であり $e_T\mathbb{C}Se_T$ は e_T を単位元とする代数となる。次の補題は補題 3.19 より明らかである。

補題 3.20. T を (X, S) の閉部分集合とする。$s \in S$ に対して $\sigma_T\sigma_s\sigma_T$ は σ_{TsT} の (0 でない) スカラー倍であり、よって $\{\sigma_{TsT} \mid s \in S\}$ はベクトル空間として $e_T\mathbb{C}Se_T$ を生成する。

定理 3.21. T を (X, S) の閉部分集合とする。このとき代数として $\mathbb{C}(S/\!\!/T) \cong e_T\mathbb{C}Se_T$ が成り立つ。

Proof. $x, y \in X$ に対して

$$(x,y) \in \bigcup_{t \in TsT} t \Longleftrightarrow (xT, yT) \in s^T$$

である。よって

$$X = x_1T \cup \cdots \cup x_rT$$

を X の分割とし X と X/T をこの順番で並べて隣接行列 σ_{TsT} と σ_{s^T} を考えれば $\sigma_{TsT} = \sigma_{s^T} \otimes J$ となる。したがって $e_T\mathbb{C}Se_T \to \mathbb{C}(S/\!\!/T)$ を $\sigma_{TsT} \mapsto n_T\sigma_{s^T}$ で定めれば、これは代数の同型を与える。 □

定理 3.22 ([18, Theorem 3.8])**.** T を (X, S) の閉部分集合とする。このとき $\{\chi \in \mathrm{Irr}(S) \mid e_\chi e_T \neq 0\}$ と $\mathrm{Irr}(S/\!\!/T)$ の間に自然な全単射がある。

Proof. $f : \mathbb{C}S \to \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} M_{\chi(1)}(\mathbb{C})$ を同型とし、各成分への射影を $f_\chi : \mathbb{C}S \to M_{\chi(1)}(\mathbb{C})$ とする。

$$e_T\mathbb{C}Se_T \cong \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} f_\chi(e_T)M_{\chi(1)}(\mathbb{C})f_\chi(e_T)$$

である。ここで全行列環におけるべき等元の標準形を考えれば $f_\chi(e_T)$ は 1 と 0 のみを対角成分にもつ対角行列としてよい。また $f_\chi(e_T)$ の階数を r_χ とする。このとき $f_\chi(e_T)M_{\chi(1)}(\mathbb{C})f_\chi(e_T)$ は自然に $M_{r_\chi}(\mathbb{C})$ と同型である。以上より $e_T\mathbb{C}Se_T$ の既約成分は $r_\chi \neq 0$ である $\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ に対応する。また $r_\chi = \chi(e_T)$ であるから $r_\chi \neq 0$ であることと $e_\chi e_T \neq 0$ であることは同値である。 □

定理 3.23 ([18, Theorem 3.10])**.** 定理 3.22 の対応によって既約指標の重複度は保たれる。

Proof. $\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ とする。$\mathbb{C}(S/\!\!/T)$ を $e_T\mathbb{C}Se_T$ と同一視して考える。このとき χ に対応する $\mathrm{Irr}(S/\!\!/T)$ の既約指標は χ の $e_T\mathbb{C}Se_T$ への制限と考えられる。これを φ と書くことにする。このとき $e_\chi e_T = e_\varphi$ である。

まず、標準指標について $\gamma_S(e_T) = n_S/n_T$ であり、$s \notin T$ に対しては $\gamma_S(\sigma_{TsT}) = 0$ であるから γ_S の $e_T\mathbb{C}Se_T$ への制限は $\gamma_{S/\!\!/T}$ に等しい。よって $\gamma_S(e_\chi e_T) = \gamma_{S/\!\!/T}(e_\varphi) = m_\varphi\varphi(e_\varphi)$ であり、また $\gamma_S(e_\chi e_T) = m_\chi\chi(e_\varphi)$ でもある。$\chi(e_\varphi) = \varphi(e_\varphi)$ であるから $m_\chi = m_\varphi$ が成り立つ。 □

次に T が正規閉部分集合である場合を考えよう。この場合には一般の閉部分集合の場合よりも強いことがいえる。

定理 3.24. T を (X,S) の正規閉部分集合とする。このとき $\pi:\mathbb{C}S\to\mathbb{C}(S/\!\!/T)$ $(\sigma_s\mapsto\dfrac{n_s}{n_{s^T}}\sigma_{s^T})$ は代数全準同型である。

Proof. $T\lhd S$ より e_T は中心的べき等元である。$\rho:\mathbb{C}S\to e_T\mathbb{C}S$ $(\sigma_s\mapsto e_T\sigma_s)$ は代数の全準同型である。また $\tau:e_T\mathbb{C}S\to C(S/\!\!/T)$ $(\sigma_{TsT}\mapsto n_T\sigma_{s^T})$ は同型である。補題 3.14 より $\sigma_T\sigma_s=\frac{n_s}{n_{s^T}}\sigma_{TsT}$ であるから

$$\tau\circ\rho(\sigma_s)=\tau\left(\frac{1}{n_T}\sigma_T\sigma_s\right)=\tau\left(\frac{n_s}{n_{s^T}n_T}\sigma_{TsT}\right)=\frac{n_s}{n_{s^T}}\sigma_{s^T}$$

である。 □

注意. F を正標数の体とする。n_s/n_{s^T} は整数になるので、このときも代数準同型 $FS\to F(S/\!\!/T)$ を定義することは出来るが、一般にそれは全射になるとは限らない。

$T\lhd S$ とし $f:\mathbb{C}(S/\!\!/T)\to M_n(\mathbb{C})$ を $S/\!\!/T$ の表現とする。このとき $f\circ\pi:\mathbb{C}S\to M_n(\mathbb{C})$ は S の表現である。また f が既約表現であることと f が全射であることは同値であり、このとき $f\circ\pi$ も全射になるから $f\circ\pi$ も既約である。したがって $S/\!\!/T$ の $\mathbb{C}$ 上の既約表現から S の既約表現が得られる。また実際の表現は

$$f\circ\pi(\sigma_s)=\frac{n_s}{n_{s^T}}f(\sigma_{s^T})$$

となる。指標に関しても同様であり、この対応を通して $\mathrm{Irr}(S/\!\!/T)\subset\mathrm{Irr}(S)$ と見ることにする。$\mathrm{Irr}(S/\!\!/T)\subset\mathrm{Irr}(S)$ と見て、同じ記号を使おうとするとその重複度が一致しなくては混乱を生じるが、定理 3.23 によりそれは一致する。

定理 3.25. T を (X,S) の正規閉部分集合とする。$\chi\in\mathrm{Irr}(S/\!\!/T)$ に対して $\varphi(\sigma_s)=\frac{n_s}{n_{s^T}}\chi(\sigma_{s^T})$ と定めれば $\varphi\in\mathrm{Irr}(S)$ であり、また $m_\chi=m_\varphi$ が成り立つ。

この節の最後に既約指標が剰余スキームの指標になるための条件を与える。

定理 3.26. T を (X,S) の正規閉部分集合とする。$\chi\in\mathrm{Irr}(S)$ に対して次は同値である。

(1) $\chi\in\mathrm{Irr}(S/\!\!/T)$.

(2) 任意の $t \in T$ に対して $\chi(\sigma_t) = n_t\chi(1)$.

(3) $e_\chi e_T = e_T e_\chi \neq 0$.

Proof. (1) $\Longrightarrow$ (2) を示す。$t \in T$ に対して $t^T = 1^T$ である。よって $\chi \in \mathrm{Irr}(S/\!\!/T)$ ならば

$$\chi(\sigma_t) = \frac{n_t}{n_1}\chi(\sigma_{1^T}) = n_t\chi(1)$$

である。

(2) $\Longrightarrow$ (3) は次の式から分かる。

$$\chi(e_\chi e_T) = \chi(e_T) = \frac{1}{n_T}\sum_{t\in T}\chi(\sigma_t) = \frac{1}{n_T}\sum_{t\in T} n_t\chi(1) = \chi(1) \neq 0.$$

(3) $\Longrightarrow$ (1) を示す。e_T, e_χ は共に $\mathbb{C}S$ の中心的べき等元で e_χ は中心的原始べき等元である。よって $e_T e_\chi \neq 0$ ならば $e_T e_\chi = e_\chi$ が成り立つ。e_χ は $\mathbb{C}(S/\!\!/T) \cong e_T\mathbb{C}S$ の中心的原始べき等元であり、対応する指標 χ は $\mathrm{Irr}(S/\!\!/T)$ に含まれる。 □

3.3 指標と正規閉部分集合

定理 2.21 で S の指標 η に対して $|\eta(\sigma_s)| \leq n_s\eta(1)$ であることを示した。ここで $\eta(\sigma_s) = n_s\eta(1)$ となる場合を考えよう。

S の (既約とは限らない) 指標 η に対して

$$K(\eta) = \{s \in S \mid \eta(\sigma_s) = n_s\eta(1)\}$$

とおく。このとき次が成り立つ。

定理 3.27. 上の記号の下で $K(\eta)$ は S の閉部分集合である。

Proof. f を指標 η を与える表現とする。定理 2.21 より $\eta(\sigma_s) = n_s\eta(1)$ であることは $f(\sigma_s)$ のすべての固有値が n_s であることと同値である。また定理 2.22 より n_s は σ_s の単根であり、$f(\sigma_s)$ の単根でもある。したがって $f(\sigma_s)$ はスカラー行列である。

$s, t \in K(\eta)$ とすると $\eta(\sigma_s\sigma_t) = n_s n_t\eta(1)$ であり、一方

$$\eta(\sigma_s\sigma_t) = \sum_{u\in S} p_{st}^u\eta(\sigma_u) \leq \sum_{u\in S} p_{st}^u|\eta(\sigma_u)| \leq \sum_{u\in S} p_{st}^u n_u\eta(1)$$

である。$n_s n_t = \sum_{u\in S} p_{st}^u n_u$ であるから $p_{st}^u \neq 0$ ならば $\eta(\sigma_u) = n_u\eta(1)$、すなわち $u \in K(\eta)$ となる。 □

さて、有限群の指標を知っていると $K(\eta)$ は正規閉部分集合ではないかと思われるだろう。しかし次の例を見ると、これは一般に成り立たない。

例 3.28. 次の関係行列で定義されるアソシエーションスキームを考える。

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 7 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 7 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 & 6 & 7 & 7 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 7 & 7 & 0 & 1 & 6 & 6 & 5 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 7 & 7 & 1 & 0 & 6 & 6 & 5 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 6 & 6 & 7 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 6 & 7 & 7 & 1 & 0 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 4 & 4 & 5 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 4 & 4 & 5 & 5 & 3 & 2 & 1 & 0 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 5 & 5 & 2 & 3 & 4 & 4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 5 & 5 & 3 & 2 & 4 & 4 & 7 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

指標表は以下の通りである。

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	m_{χ_i}
χ_1	1	1	1	1	2	2	2	2	1
χ_2	1	1	-1	-1	-2	-2	2	2	1
χ_3	1	-1	-1	1	0	0	0	0	3
χ_4	1	-1	1	-1	0	0	0	0	3
χ_5	2	2	0	0	0	0	-2	-2	2

このとき $K(\chi_3) = \{s_0, s_3\}$ は正規閉部分集合ではない。

有限群では、指標の核が正規部分群になることを用いて指標表からすべての正規部分群を読み取ることができるが、同様のことはアソシエーションスキームでは出来ないのだろうか。以下でこの問題について考える。

命題 3.29. S の正規閉部分集合 T に対して、ある (既約とは限らない) 指標 η が存在して $K(\eta) = T$ である。

Proof. $\eta = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S/\!\!/T)} \chi$ とおく。$T \subset K(\eta)$ は明らかである。

$s \in K(\eta)$ とする。

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S/\!\!/T)} m_\chi \chi(\sigma_s) = n_s \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S/\!\!/T)} m_\chi \chi(1_s) \neq 0$$

であり、かつ

$$\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(S/\!/T)} m_\chi\chi(\sigma_s) = \frac{n_s}{n_{s^T}} \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(S/\!/T)} m_\chi\chi(\sigma_{s^T}) = \frac{n_s}{n_{s^T}}\gamma_{S/\!/T}(\sigma_{s^T})$$

が成り立つ。よって $s^T = 1^T$ となり $s \in T$ である。 □

このことから、問題はどのような指標 η に対して $K(\eta) \lhd S$ となるかということになる。

$$I(\eta) = \{\chi \in \mathrm{Irr}(S) \mid \chi(\sigma_s) = n_s\chi(1) \ \text{ for all } s \in K(\eta)\}$$

とおくと次の結果を得る。

定理 3.30. S の指標 η に対して $K(\eta) \lhd S$ であることと

$$\sum_{\chi\in I(\eta)} m_\chi\chi(1) = \frac{n_S}{n_{K(\eta)}}$$

が成り立つことは同値である。

Proof. $T = K(\eta)$ とおく。$T \lhd S$ とすると $I(\eta) = \mathrm{Irr}(S/\!/T)$ である。よって

$$\sum_{\chi\in I(\eta)} m_\chi\chi(1) = n_{S/\!/T} = \frac{n_S}{n_T}$$

となる。

次に $\sum_{\chi\in I(\eta)} m_\chi\chi(1) = n_S/n_{K(\eta)}$ を仮定する。$\chi \in I(\eta)$ ならば

$$\chi(e_T) = \frac{1}{n_T}\sum_{t\in T}\chi(\sigma_t) = \frac{1}{n_T}\sum_{t\in T} n_t\chi(1) = \chi(1)$$

である。よって $e_Te_\chi = e_\chi$ が成り立つ。また

$$\begin{aligned}\gamma(e_T) &= \frac{n_S}{n_T},\\ \gamma\left(\sum_{\chi\in I(\eta)} e_Te_\chi\right) &= \sum_{\chi\in I(\eta)}\gamma(e_\chi) = \sum_{\chi\in I(\eta)} m_\chi\chi(1) = \frac{n_S}{n_T}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで γ は標準指標である。$e_T = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(S)} e_Te_\chi$ であり、$e_Te_\chi \neq 0$ ならば $\gamma(e_Te_\chi) > 0$ であることから $e_T = \sum_{\chi\in I(\eta)} e_\chi$ となり、特に e_T は中心的べき等元である。よって $T \lhd S$ である。 □

指標の重複度は直交関係から計算できる。したがってこの結果から、指標表が与えられればすべての正規閉部分集合を求めることができる。

注意. 一般に二つの正規閉部分集合の共通部分は正規閉部分集合とは限らない。例えば、関係行列

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 & 11 & 11 \\
1 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 & 11 & 11 \\
2 & 3 & 0 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 & 9 & 9 & 8 & 8 & 11 & 11 & 10 & 10 \\
3 & 2 & 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 9 & 9 & 8 & 8 & 11 & 11 & 10 & 10 \\
4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 & 10 & 10 & 11 & 11 & 8 & 8 & 9 & 9 \\
5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 0 & 3 & 2 & 10 & 10 & 11 & 11 & 8 & 8 & 9 & 9 \\
6 & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 & 11 & 11 & 10 & 10 & 9 & 9 & 8 & 8 \\
7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 11 & 11 & 10 & 10 & 9 & 9 & 8 & 8 \\
8 & 8 & 9 & 9 & 11 & 11 & 10 & 10 & 0 & 1 & 2 & 3 & 6 & 7 & 4 & 5 \\
8 & 8 & 9 & 9 & 11 & 11 & 10 & 10 & 1 & 0 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 4 \\
9 & 9 & 8 & 8 & 10 & 10 & 11 & 11 & 2 & 3 & 0 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
9 & 9 & 8 & 8 & 10 & 10 & 11 & 11 & 3 & 2 & 1 & 0 & 5 & 4 & 7 & 6 \\
11 & 11 & 10 & 10 & 8 & 8 & 9 & 9 & 6 & 7 & 4 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
11 & 11 & 10 & 10 & 8 & 8 & 9 & 9 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 & 0 & 3 & 2 \\
10 & 10 & 11 & 11 & 9 & 9 & 8 & 8 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 3 & 0 & 1 \\
10 & 10 & 11 & 11 & 9 & 9 & 8 & 8 & 5 & 4 & 7 & 6 & 3 & 2 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

で定義されるアソシエーション・スキームについて、二つの正規閉部分集合 $T = \{s_0, s_2, s_4, s_6\}$ と $U = \{s_0, s_3, s_4, s_7\}$ の共通部分 $T \cap U = \{s_0, s_4\}$ は正規ではない [41]。

3.4 群的スキーム

非可換な有限群は非可換なアソシエーションスキームを定義するが、そのようにして得られたアソシエーションスキームは一般の非可換アソシエーションスキームとくらべるととても良い性質を多く持っている。ここでは有限群と似た良い性質をもつアソシエーションスキームを考える。有限群の良い性質の一つに共役類をもつということがある。アソシエーションスキームに対して共役類を考えることは出来ないように思われるが、有限群の二つの元が共役であることと、任意の指標に対する値が等しいことは同値であるので、以下の一般化を考える。

(X, S) をアソシエーションスキームとする。$s, t \in S$ に対して $s \sim t$ であることを、任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ に対して

$$\frac{1}{n_s}\chi(\sigma_s) = \frac{1}{n_t}\chi(\sigma_t)$$

であることで定める。明らかにこれは同値関係である。$s \in S$ を含む同値類の和集合を $\widetilde{s}$ で表す。$\widetilde{s}$ は $X \times X$ の部分集合であり、$\widetilde{S} = \{\widetilde{s} \mid s \in S\}$ とおけば、これは $X \times X$ の分割を与える。

$|\widetilde{S}| = |\mathrm{Irr}(S)|$ であるとき (X, S) を**群的スキーム** (group-like scheme) という。有限群に対しては関係 $\sim$ は共役という関係と同じで、したがって細スキーム (有限群) は常に群的である。

次の定理は群的スキームであることのいくつかの特徴付けを与えている。定理を述べるために一つ定義をする。型の等しい二つの行列、またはベクトル $M = (m_{ij})$, $N = (n_{ij})$ に対して、その対応する成分の積をとる演算 $M \circ N = (m_{ij}n_{ij})$ を考える。これを**アダマール積** (Hadamard product) と呼ぶ。また $Z(\mathbb{C}S)$ で $\mathbb{C}S$ の中心を表す。$Z(\mathbb{C}S)$ は $\{e_\chi \mid \chi \in \mathrm{Irr}(S)\}$ を基底にもつ。

$$e_\chi = \frac{m_\chi}{n_S} \sum_{s \in S} \frac{1}{n_s} \overline{\chi(\sigma_s)} \sigma_s$$

であるから $Z(\mathbb{C}S) \subseteq \mathbb{C}\widetilde{S}$ は常に成り立つ。

定理 3.31. アソシエーションスキーム (X, S) に対して次は同値である。

(1) $Z(\mathbb{C}S) = \mathbb{C}\widetilde{S}$.

(2) $\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathbb{C}S) = |\widetilde{S}|$. (すなわち (X, S) が群的であること。)

(3) ある S の分割 A があって $a \in A$ に対して $\sigma_a = \sum_{s \in a} \sigma_s$ とおくと $Z(\mathbb{C}S) = \bigoplus_{a \in A} \mathbb{C}\sigma_a$ となる。すなわち $\mathbb{C}S$ の中心が (X, S) の融合スキームの隣接代数として得られる。

(4) $Z(\mathbb{C}S)$ はアダマール積で閉じている。

証明のために一つの補題を用意する。ベクトルが基本的であるとは、その一つの成分が 1 で、他の成分はすべて 0 であることとする。また行列 M に対して、その i 番目の行ベクトルを M_{i*} で表し、その j 番目の列ベクトルを M_{*j} と表すことにする。

補題 3.32. M を階数 m の $m \times n$ 行列とし、どの列ベクトルも零ベクトルではないとする。更に M の二つの行ベクトルのアダマール積は、M の行ベクトルたちの一次結合で書けるとする。このときある m 次正則行列 L があって LM のすべての列ベクトルは基本的になる。

Proof. M のはじめの m 列が一次独立であると仮定してよい。よって $M = (M_0|M_1)$ とし M_0 を正則行列とする。$L = M_0^{-1}$ とおく。$LM = (I_m|LM_1)$ である。LM の各列が基本的であることをいえばよい。このとき LM の行ベクトルのアダマール積も LM の行ベクトルたちの一次結合で書けることに注意しておく。

$(LM)_{ij} \neq 0, (LM)_{i'j} \neq 0$ とすると $(LM)_{i*} \circ (LM)_{i'*}$ は LM の行ベクトルの一次結合では書けない。$(LM)_{ij} \neq 0, (LM)_{ij} \neq 1$ とすると $(LM)_{i*} \circ (LM)_{i*}$ は LM の行ベクトルの一次結合では書けない。よって LM の列ベクトルは基本的である。 □

定理 3.31 の証明. (1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) は明らかである。(4) を仮定して (1) を示す。

$c = \sum_{s \in S} c_s \sigma_s$ から行ベクトル $(c_s \mid s \in S)$ への対応を考える。もちろんこれは全単射であるから、これを同一視する。行と列がそれぞれ $\mathrm{Irr}(S)$ と S で添字付けられた行列 $M = (n_s^{-1} \chi(\sigma_{s^*}))_{\chi,s}$ を考える。このとき行ベクトル $M_{\chi *}$ は $n_S m_\chi^{-1} e_\chi$ に対応する。よって M の行ベクトルの全体は $Z(\mathbb{C}S)$ の基底である。(4) を仮定しているので、この行列 M は補題 3.32 の条件を満たす。よってある正則行列 L があって LM の各列は基本的となる。$1 \leq i \leq |\mathrm{Irr}(S)|$ に対して

$$U_i = \{s \in S \mid (LM)_{i,s} = 1\}$$

とおくと LM の性質から $S = \bigcup_{i=1}^{|\mathrm{Irr}(S)|} U_i$ は S の分割となる。

$s, t \in S$ が同じ U_i に含まれるための必要十分条件は $(LM)_{*s} = (LM)_{*t}$ であることで、更にこれは $M_{*s} = M_{*t}$ であることと同値である。よって U_i は $\sim$ 同値類であり、(1) が成り立つ。 □

定理 3.33. (X, S) を群的スキームとすると、$(X, \widetilde{S})$ は可換アソシエーションスキームである。

Proof. $\mathbb{C}\widetilde{S} = Z(\mathbb{C}S)$ だから $\mathbb{C}\widetilde{S}$ は積で閉じていて、更に可換である。他の条件は明らか。 □

例 3.34. (X, S) を有限群 G で定義される細スキームとする。このとき $(X, \widetilde{S})$ は G で定義される群アソシエーションスキームである。

定理 3.35. (X, S) を群的スキームとすると、任意の指標 η に対して $K(\eta) \lhd S$ である。特に $T \lhd S, U \lhd S$ ならば $T \cap U \lhd S$ である。

Proof. $K(\eta)$ はいくつかの $\sim$ 同値類の和集合であるから $\sigma_{K(\eta)}$ は $\mathbb{C}S$ の中心に含まれる。よって $K(\eta) \lhd S$ である。 □

群的スキーム (X,S) の指標表は可換アソシエーションスキーム $(X,\widetilde{S})$ の指標表から容易に求めることができる。これを利用して次の結果を得る。

定理 3.36 (群的スキームの第二直交関係). (X,S) を群的スキームとする。このとき

$$\frac{n_{\widetilde{t}}}{n_S n_s n_t}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(S)}\frac{m_\chi}{\chi(1)}\chi(\sigma_s)\chi(\sigma_{t^*})=\delta_{\widetilde{s}\widetilde{t}}.$$

Proof. $\mathbb{C}S$ と $\mathbb{C}\widetilde{S}=Z(\mathbb{C}S)$ の中心的べき等分解は一致するから、$\mathrm{Irr}(S)$ と $\mathrm{Irr}(\widetilde{S})$ の間には自然な全単射 $\chi\mapsto\widetilde{\chi}$ がある。指標の値については

$$\frac{\chi(\sigma_t)}{n_t\chi(1)}=\frac{\widetilde{\chi}(\sigma_{\widetilde{t}})}{n_{\widetilde{t}}}$$

が成り立つ。重複度 m_χ は $\mathrm{rank}(e_\chi)/\chi(1)$ で与えられ、$e_\chi=e_{\widetilde{\chi}}$, $\widetilde{\chi}(1)=1$ より $m_{\widetilde{\chi}}=m_\chi\chi(1)$ が成り立つ。これを可換アソシエーションスキームの第二直交関係に代入すれば結果が成り立つ。 □

注意. 与えられたアソシエーションスキームが群的であるかどうかは、指標表、または隣接代数の中心を求めなければ判定することができない。計算機などを利用してそれを判定するには $\{\sum_{s\in S}n_s^{-1}\sigma_{s^*}\sigma_t\sigma_s\mid t\in S\}$ がベクトル空間として $Z(\mathbb{C}S)$ を生成すること (定理 2.27) を利用し、$Z(\mathbb{C}S)$ がアダマール積で閉じていることを確認すればよい。

Chapter 4

指標理論

4.1 双対隣接代数

アソシエーション・スキーム (X, S) の隣接代数 $\mathbb{C}S$ には通常の積の他にアダマール積が定義されていて、この積に関しても代数である。この代数を**双対隣接代数** (dual adjacency algebra) といい $\mathbb{C}S^\circ$ と書く。明らかに $\{\sigma_s \mid s \in S\}$ は直交原始べき等元であり、$\mathbb{C}S^\circ$ は可換な半単純代数である。非可換なアソシエーション・スキームに対して双対隣接代数を考えても、現在のところ有用な応用は得られていないように思われるため、ここでは可換なアソシエーション・スキームのみを考えることにする。非可換の場合の類似の結果は [22] に見られる。

以下、この節では (X, S) を可換なアソシエーション・スキームと仮定する。

可換アソシエーションスキーム (X, S) に対して、その隣接代数 $\mathbb{C}S$ は $\mathbb{C}$ のいくつかの直和に同型であり、よって $\{e_\chi \mid \chi \in \mathrm{Irr}(S)\}$ は $\mathbb{C}S$ の基底になる。二つの基底 $\{\sigma_s \mid s \in S\}$ と $\{e_\chi \mid \chi \in \mathrm{Irr}(S)\}$ の変換を考える。

$$
\begin{aligned}
e_\chi &= \frac{1}{n_S} \sum_{s \in S} q_\chi(s) \sigma_s, \\
\sigma_s &= \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} p_s(\chi) e_\chi.
\end{aligned}
$$

このとき、これまでの議論から

$$
p_s(\chi) = \chi(\sigma_s), \quad q_\chi(s) = \frac{m_\chi}{n_s} \overline{\chi(\sigma_s)}
$$

である。

$$P = (p_s(\chi))_{\chi,s}\,, \quad Q = (q_\chi(s))_{s,\chi}$$

とおけば $PQ = QP = n_S I$ である。隣接代数において、基底 $\{\sigma_s \mid s \in S\}$ の積は

$$\sigma_s \sigma_t = \sum_{u \in S} p_{st}^u \sigma_h$$

で与えられた。これと双対的に、基底 $\{e_\chi \mid \chi \in \mathrm{Irr}(S)\}$ のアダマール積を

$$e_\chi \circ e_\varphi = \frac{1}{n_S} \sum_{\xi \in \mathrm{Irr}(S)} q_{\chi\varphi}^\xi e_\xi$$

とする。$q_{\chi\varphi}^\xi$ を**クライン・パラメーター** (Krein parameter) と呼ぶ。

命題 4.1. 可換アソシエーションスキームに対して次が成り立つ。

$$\begin{aligned} p_{st}^u &= \frac{n_s n_t}{n_S} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} \frac{1}{{m_\chi}^2} q_\chi(s) q_\chi(t) \overline{q_\chi(u)} \\ q_{\chi\varphi}^\xi &= \frac{m_\chi m_\varphi}{n_S} \sum_{s \in S} \frac{1}{{n_s}^2} p_s(\chi) p_s(\varphi) \overline{p_s(\xi)} \end{aligned}$$

Proof. 標準指標 γ_S について

$$\begin{aligned} \gamma_S(\sigma_s \sigma_t \sigma_{u^*}) &= \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} m_\chi \chi(\sigma_s \sigma_t \sigma_{u^*}) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} m_\chi \chi(\sigma_s \sigma_t) \overline{\chi(\sigma_u)} \\ &= \sum_{v \in S} p_{st}^v \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} m_\chi \chi(\sigma_v) \overline{\chi(\sigma_u)} = n_S n_u p_{st}^u \end{aligned}$$

が成り立つ。一方で可換性より

$$\begin{aligned} \gamma_S(\sigma_s \sigma_t \sigma_{u^*}) &= \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} m_\chi \chi(\sigma_s) \chi(\sigma_t) \overline{\chi(\sigma_u)} \\ &= n_S n_u \left(\frac{n_s n_t}{n_S} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} \frac{1}{{m_\chi}^2} q_\chi(s) q_\chi(t) \overline{q_\chi(u)} \right) \end{aligned}$$

であるから、一つ目の主張が成り立つ。

$e_\chi = \frac{m_\chi}{n_S}\sum_{s\in S}\overline{\chi(\sigma_s)}\sigma_s$ であるから

$$\begin{aligned} e_\chi \circ e_\varphi &= \frac{m_\chi m_\varphi}{{n_S}^2}\sum_{s\in S}\overline{\chi(\sigma_s)\varphi(\sigma_s)}\sigma_s \\ \xi(e_\chi \circ e_\varphi) &= \frac{m_\chi m_\varphi}{{n_S}^2}\sum_{s\in S}\overline{\chi(\sigma_s)\varphi(\sigma_s)}\xi(\sigma_s) \end{aligned}$$

である。また

$$\xi(e_\chi \circ e_\varphi) = \frac{1}{n_S}\sum_{\mu\in \mathrm{Irr}(S)} q^\mu_{\chi\varphi}\xi(e_\mu) = \frac{1}{n_S}q^\mu_{\chi\varphi}$$

である。これは二つ目の式を意味する。 □

この命題によって以下が得られる。

系 4.2. 二つの可換スキームが代数的に同型であることと、その指標表が行と列の適当な並べ替えによって一致することは同値である。

注意. 非可換の場合には系 4.2 は成り立たない。例えば、位数 8 の二面体群と四元数群のように、非同型な二つの群が同じ指標表をもつ場合がある。

クライン・パラメーター $q^\xi_{\chi\varphi}$ と重複度 m_χ に関して、以下のように交叉数 p^u_{st} と分岐指数 n_s に関する公式 (命題 1.21) と類似の式が成り立つ。

命題 4.3. 可換スキーム (X, S) について以下が成り立つ。

(1) $q^\xi_{\chi\varphi} = q^\xi_{\varphi\chi}$.

(2) $q^\varphi_{1_S\chi} = \delta_{\chi\varphi}$.

(3) $q^\xi_{\chi\varphi} = q^{\overline{\xi}}_{\overline{\chi}\,\overline{\varphi}}$.

(4) $q^{1_S}_{\chi\varphi} = m_\chi \delta_{\chi\overline{\varphi}}$.

(5) $\sum_{\varphi\in\mathrm{Irr}(S)} q^\xi_{\chi\varphi} = m_\chi$.

(6) $\sum_{\mu\in\mathrm{Irr}(S)} q^\mu_{\chi\varphi}q^\nu_{\mu\xi} = \sum_{\mu\in\mathrm{Irr}(S)} q^\mu_{\varphi\xi}q^\nu_{\chi\mu}$.

(7) $m_\chi q^{\overline{\chi}}_{\varphi\xi} = m_\varphi q^{\overline{\varphi}}_{\xi\chi} = m_\xi q^{\overline{\xi}}_{\chi\varphi}$.

Proof. (1) はアダマール積の可換性による。$e_{1_S} \circ e_\chi = \frac{1}{n_S} e_\chi$ より (2) が成り立つ。(3) は命題 4.1 による。

$$q_{\chi\varphi}^{1_S} = \frac{m_\chi m_\varphi}{n_S} \sum_{s\in S} \frac{1}{{n_s}^2} \chi(\sigma_s)\varphi(\sigma_s)\overline{1_S(\sigma_s)} = m_\chi \delta_{\chi\overline{\varphi}}$$

であるから (4) が成り立つ。(5) は以下のように示される。

$$\begin{aligned}
\sum_{\varphi\in\mathrm{Irr}(S)} q_{\chi\varphi}^{\xi} &= \sum_{\varphi\in\mathrm{Irr}(S)} \frac{m_\chi m_\varphi}{n_S} \sum_{s\in S} \frac{1}{{n_s}^2} \chi(\sigma_s)\varphi(\sigma_s)\overline{\xi(\sigma_s)} \\
&= \frac{m_\chi}{n_S} \sum_{s\in S} \chi(\sigma_s)\overline{\xi(\sigma_s)} \sum_{\varphi\in\mathrm{Irr}(S)} m_\varphi \varphi(\sigma_s) \\
&= \frac{m_\chi}{n_S} \sum_{s\in S} \chi(\sigma_s)\overline{\xi(\sigma_s)}\gamma_S(\sigma_s) \\
&= m_\chi \chi(1)\overline{\xi(1)} = m_\chi
\end{aligned}$$

(6) はアダマール積の結合法則による。(7) は (6) で $\nu = 1_S$ とおいて得られる。 □

定理 4.4 (Krein 条件)**.** $q_{\chi\varphi}^{\xi}$ は非負実数である。

Proof. $\chi(\sigma_{s^*}) = \overline{\chi(\sigma_s)}$ より e_χ は非負エルミート行列である。よって $e_\chi \otimes e_\varphi$ も非負エルミート行列である。$e_\chi \circ e_\varphi$ は $e_\chi \otimes e_\varphi$ の小行列なので、また非負エルミート行列である。$\frac{1}{n_S} q_{\chi\varphi}^{\xi}$ は $e_\chi \otimes e_\varphi$ の固有値なので非負実数である。 □

例 4.5 (Q-多項式スキーム)**.** 対称スキーム (X, S) について、既約指標に適当な番号付け $\mathrm{Irr}(S) = \{1_S = \chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_d\}$ と複素係数多項式 f_i ($i = 0, 1, \cdots, d$, $\deg f_i = i$) が存在して、アダマール積に関して $e_{\chi_i} = f_i(e_{\chi_1})$ となるとき、(X, S) を ***Q*-多項式スキーム** (Q-polynomial scheme) という。

例 4.6. ハミング・スキーム $H(n, q)$ とジョンソン・スキーム $J(v, k)$ は Q-多項式スキームである。

未解決問題 4.7. Q-多項式スキームの組合せ論的な特徴付けは知られていない。

注意. 群アソシエーション・スキームの対称化が Q-多項式スキームとなる場合は [28] で分類されている。

4.2 指標の積

有限群の指標理論において、指標の積がまた指標になることは重要である。これは有限群の群代数がホップ代数であることによる。アソシエーション・スキームの隣接代数は一般にホップ代数ではないので、指標の積は指標にはならない。しかし特別な場合には積も指標になる。ここでは指標の積がまた指標になる場合を考える。

(X,S) を細スキーム (有限群) とする。S の (既約とは限らない) 二つの指標 χ,φ に対して $\chi\varphi(\sigma_s)=\chi(\sigma_s)\varphi(\sigma_s)$ で積を定めれば、これはまた指標になる。その理由は、余積 $\Delta:\mathbb{C}S\to\mathbb{C}S\otimes\mathbb{C}S$ $(\sigma_s\mapsto\sigma_s\otimes\sigma_s)$ が代数準同型であることによる (テンソルはすべて $\mathbb{C}$ 上で考える)。実際には $\mathbb{C}S$ はもっと強くホップ代数であることが分かる。

一般のアソシエーションスキームの隣接代数に自然にホップ代数の構造を入れることは出来ない。しかし、以下のように余単位元が代数準同型であるような余代数の構造を入れることができる。**余単位元** (counit) $\varepsilon:\mathbb{C}S\to\mathbb{C}$ を $\varepsilon(\sigma_s)=n_s$ で定めると、これは代数準同型である。また**余積** (comultiplication) $\Delta:\mathbb{C}S\to\mathbb{C}S\otimes\mathbb{C}S$ を $\sigma_s\mapsto\frac{1}{n_s}\sigma_s\otimes\sigma_s$ で定めると $(\mathbb{C}S,\Delta,\varepsilon)$ は**余代数** (coalgebra) となる。

注意. 代数かつ余代数で、余単位元、余積が共に代数準同型であるとき、それを**双代数** (bialgebra) という。さらに**対合射** (antipode) をもつとき**ホップ代数** (Hopf algebra) という。詳しくは、例えば [31] を参照して欲しい。

アソシエーションスキームの隣接代数に上のように余代数構造を入れても、余積が代数準同型にならないため、それは双代数にはならない。そこで強正規閉部分集合 T による剰余スキームを考える。

$$\Delta':\mathbb{C}S\to\mathbb{C}(S/\!\!/T)\otimes\mathbb{C}S,\quad \sigma_s\mapsto\sigma_{s^T}\otimes\sigma_s$$

を考える。これは余積 Δ と自然な準同型 $\pi:\mathbb{C}S\to\mathbb{C}(S/\!\!/T)$ によって $\Delta'=(\pi\otimes 1)\circ\Delta$ と表されるものである。このとき次が成り立つ。

補題 4.8. Δ' は代数準同型である。

Proof. 線形性は明らかなので、積が保存されることを示す。

$$\begin{aligned}\Delta'(\sigma_s\sigma_t) &= \sum_{u\in S}p_{st}^u\Delta'(\sigma_u)=\sum_{u\in S}p_{st}^u\sigma_{u^T}\otimes\sigma_u,\\ \Delta'(\sigma_s)\Delta'(\sigma_t) &= (\sigma_{s^T}\otimes\sigma_s)(\sigma_{t^T}\otimes\sigma_t)=\sum_{u\in S}p_{st}^u\sigma_{(s^Tt^T)}\otimes\sigma_u\end{aligned}$$

であるが $S/\!\!/T$ が細スキームであるから $p_{st}^u \neq 0$ ならば $s^T t^T = u^T$ が成り立つ。よってこの二つの式は等しい。 $\square$

次の補題は明らかである。

補題 4.9. f を $S/\!\!/T$ の d_f 次の表現、g を S の d_g 次の表現とすると $(f\otimes g)\circ\Delta'$ は S の $d_f d_g$ 次の表現である。また χ_f, χ_g をそれぞれ f, g の指標とすると $(f\otimes g)\circ\Delta'$ の指標は $\sigma_s \mapsto \chi_f(\sigma_{s^T})\chi_g(\sigma_s) = n_s^{-1}\chi_f(\sigma_s)\chi_g(\sigma_s)$ で与えられる。

この補題を既約指標に対して書き直すと次のようになる。

定理 4.10. $T \lhd^\sharp S$ とする。$\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ と $\varphi \in \mathrm{Irr}(S/\!\!/T)$ に対して $\chi\varphi(\sigma_s) = n_s^{-1}\chi(\sigma_s)\varphi(\sigma_s)$ で指標の積を定めれば $\chi\varphi$ は S の指標である。

有限群の既約指標の積に関しては、その一方が一次の指標であれば積はまた既約になる。これに対してアソシエーションスキームでは次が成り立つ。

定理 4.11. $T \lhd^\sharp S$ とする。$\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ と $\varphi \in \mathrm{Irr}(S/\!\!/T),\ \varphi(1) = 1$ に対して $\chi\varphi \in \mathrm{Irr}(S)$ である。またこのとき $\chi\varphi$ の重複度は χ の重複度に等しい。

Proof. 補題 4.9 の記号を使う。φ は f の指標で χ は g の指標であるとする。$\varphi(1) = 1$ なので $d_f = 1$ である。表現 $(f\otimes g)\circ\Delta' : \mathbb{C}S \to M_{d_g}(\mathbb{C})$ が既約であることを示すには、これが全射であることをいえばよい。$A \in M_{d_g}(\mathbb{C})$ を任意に取る。g は既約なので全射である。よってある $\alpha = \sum_{s\in S}\alpha_s\sigma_s \in \mathbb{C}S$ があって $A = g(\alpha)$ である。φ は (本質的に) 有限群の線形指標であるから、任意の $s \in S$ に対して $\varphi(\sigma_{s^T}) = f(\sigma_{s^T}) \neq 0$ である。$\beta = \sum_{s\in S} f(\sigma_{s^T})^{-1}\alpha_s\sigma_s$ とおけば

$$(f\otimes g)\circ\Delta'(\beta) = \sum_{s\in S} f(\sigma_{s^T})^{-1}\alpha_s f(\sigma_{s^T}) \otimes g(\sigma_s) = 1 \otimes g(\alpha) = A$$

である。

重複度については

$$\begin{aligned}
\frac{\chi\varphi(1)}{m_{\chi\varphi}} &= \frac{1}{n_S}\sum_{s\in S}\frac{1}{n_s}\chi\varphi(\sigma_s)\chi\varphi(\sigma_{s^*}) = \frac{1}{n_S}\sum_{s\in S}\frac{1}{{n_s}^3}\chi(\sigma_s)\chi(\sigma_{s^*})\varphi(\sigma_s)\varphi(\sigma_{s^*}) \\
&= \frac{1}{n_S}\sum_{s\in S}\frac{1}{{n_s}^3}\frac{{n_s}^2}{{n_{s^T}}^2}\chi(\sigma_s)\chi(\sigma_s)\varphi(\sigma_{s^T})\varphi(\sigma_{(s^T)^*}) \\
&= \frac{1}{n_S}\sum_{s\in S}\frac{1}{n_s}\chi(\sigma_s)\chi(\sigma_{s^*}) = \frac{\chi(1)}{m_\chi}
\end{aligned}$$

であることと $\chi\varphi(1) = \chi(1)$ よりわかる。 $\square$

注意. $T \lhd^\sharp S$, $\chi \in \mathrm{Irr}(S)$, $\varphi \in \mathrm{Irr}(S/\!\!/T)$, $\chi(1) = 1$ であっても $\chi\varphi$ が既約になるとは限らない。例えば、例 3.28 において $\chi_3\chi_5 = \chi_3 + \chi_4$ がそのような例を与える。

これらの結果を利用するためには $\mathrm{Irr}(S/\!\!/\mathbf{O}^\vartheta(S))$ を特徴付けることが重要である。

定理 4.12 ([25, Theorem 2.8])**.** $\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ に対して $\chi \in \mathrm{Irr}(S/\!\!/\mathbf{O}^\vartheta(S))$ であることと $\chi(1) = m_\chi$ であることは同値である。

Proof. $\chi \in \mathrm{Irr}(S/\!\!/\mathbf{O}^\vartheta(S))$ ならば χ は本質的に有限群の指標であるから $\chi(1) = m_\chi$ である。

$\chi(1) = m_\chi$ と仮定する。$v = \sum_{s\in S} \frac{1}{n_s}\sigma_s\sigma_{s^*}$ とする。$\langle \mathrm{Supp}(v)\rangle = \mathbf{O}^\vartheta(S)$ である。また、補題 2.26 より $ve_\chi = \frac{\chi(1)n_S}{m_\chi}e_\chi = n_S e_\chi$ である。$v = \sum_{s\in S} a_s\sigma_s$ と書けば、$a_s \geq 0$ であり、v の自明な指標 1_S の値を考えることにより $\sum_{s\in S} a_s n_s = n_S$ である。$|\chi(\sigma_s)| \leq n_s\chi(1)$ に注意して

$$|\chi(v)| \leq \sum_{s\in S} a_s|\chi(\sigma_s)| \leq \sum_{s\in S} a_s n_s \chi(1) = n_S\chi(1)$$

となる。一方

$$|\chi(v)| = |\chi(ve_\chi)| = |\chi(n_S e_\chi)| = n_S\chi(1)$$

でもある。よって $|\chi(\sigma_s)| = n_s\chi(1)$ が $a_s \neq 0$ なる任意の $s \in S$ について成り立つ。特に $a_1 \neq 0$ であることから $\chi(\sigma_s) = n_S\chi(1)$ が任意の $s \in \mathbf{O}^\vartheta(S)$ について成り立ち $\chi \in \mathrm{Irr}(S/\!\!/\mathbf{O}^\vartheta(S))$ である。 □

指標の積とクライン・パラメーターの間には以下の関係がある。(X, S) を可換スキームと仮定する。$\chi\varphi \in \mathrm{Irr}(S)$ に対して、その積を前と同じ様に

$$\chi\varphi(\sigma_s) = \frac{1}{n_s}\chi(\sigma_s)\varphi(\sigma_s)$$

で定める。$\chi\varphi$ は指標とは限らないが、可換性の仮定より既約指標の一次結合

$$\chi\varphi = \sum_{\xi\in\mathrm{Irr}(S)} r^\xi_{\chi\varphi}\xi$$

と書ける。

命題 4.13. (X, S) を可換スキームと仮定し、上記の記号を用いる。このときクライン・パラメーター $q^\xi_{\chi\varphi}$ について $q^\xi_{\chi\varphi} = m_\chi m_\varphi {m_\xi}^{-1} r^\xi_{\chi\varphi}$ が成り立つ。

Proof. 直接計算して

$$
\begin{aligned}
e_\chi \circ e_\varphi &= \left(\frac{m_\chi}{n_S} \sum_{s\in S} \frac{1}{n_s} \chi(\sigma_{s^*})\sigma_s \right) \circ \left(\frac{m_\varphi}{n_S} \sum_{s\in S} \frac{1}{n_s} \varphi(\sigma_{s^*})\sigma_s \right) \\
&= \frac{m_\chi m_\varphi}{{n_S}^2} \sum_{s\in S} \frac{1}{{n_s}^2} \chi(\sigma_{s^*})\varphi(\sigma_{s^*})\sigma_s = \frac{m_\chi m_\varphi}{{n_S}^2} \sum_{s\in S} \frac{1}{n_s} \chi\varphi(\sigma_{s^*})\sigma_s \\
&= \frac{m_\chi m_\varphi}{{n_S}^2} \sum_{s\in S} \frac{1}{n_s} \sum_{\xi\in \mathrm{Irr}(S)} r^\xi_{\chi\varphi} \xi(\sigma_{s^*})\sigma_s \\
&= \frac{1}{n_S} \sum_{\xi\in \mathrm{Irr}(S)} \frac{m_\chi m_\varphi}{m_\xi} r^\xi_{\chi\varphi} \left(\frac{m_\xi}{n_S} \sum_{s\in S} \frac{1}{n_s} \xi(\sigma_{s^*})\sigma_s \right) \\
&= \frac{1}{n_S} \sum_{\xi\in \mathrm{Irr}(S)} \frac{m_\chi m_\varphi}{m_\xi} r^\xi_{\chi\varphi} e_\xi
\end{aligned}
$$

となる。 □

4.3 制限表現と誘導表現

T をアソシエーション・スキーム (X, S) の閉部分集合とする。T の表現と S の表現の間の関係を見ることは重要であるが、一般には詳しいことは分かっていない。ここではこれを考えるために基本的な制限表現と誘導表現について、簡単に解説する。係数体は $\mathbb{C}$ として考えるが、以下の制限写像、誘導写像は任意の係数環上で定義される。

$f : \mathbb{C}S \to \mathbb{C}$ を S の表現とする。$\mathbb{C}T$ は $\mathbb{C}S$ の部分環であるので、f の $\mathbb{C}T$ への制限が考えられる。これを f_T または $f|_T$ と書いて f の T への**制限表現** (restricted representation) という。**制限加群**も同様に定義する。指標についても同様に χ_T, $\chi|_T$ などと書き χ の T への**制限指標** (restricted character) という。

次に V を右 $\mathbb{C}T$-加群とする。$\mathbb{C}T$ 上のテンソル積 $V \otimes_{\mathbb{C}T} \mathbb{C}S$ は右 $\mathbb{C}S$-加群の構造をもつ。これを V^S と書いて V の S への**誘導加群** (induced module) という。誘導加群に対応する表現、指標をそれぞれ**誘導表現** (induced representation)、**誘導指標** (induced character) という。指標 φ に対しても φ^S などの記号を用いる。

右 $\mathbb{C}S$ 加群 V と右 $\mathbb{C}T$ 加群 W について、以下の $\mathbb{C}$-空間としての同型が成り立つ [33, Theorem I.11.3]。

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}T}(W, V_T) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}S}(W^S, V)$$

V, W を既約とし、この式を指標で書けば以下の結果を得る。

定理 4.14 (フロベニウス相互律). T をアソシエーション・スキーム (X, S) の閉部分集合とし、$\chi \in \mathrm{Irr}(S)$, $\varphi \in \mathrm{Irr}(T)$ とする。このとき χ_T における φ の重複度と φ^S における χ の重複度は等しい。

4.4 クリフォード理論

有限群の表現論においてクリフォード理論は基本的かつ重要である。同様の理論は有限群以外のいくつかの対象についても成り立つことが知られている。しかし、アソシエーション・スキームについては、まだよく分かっておらず、ある強い仮定の下で成り立つことが知られているだけである。

　はじめに簡単な例を示す。

例 4.15. 以下の関係行列で定義されるアソシエーション・スキーム (X, S) を考える。

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 \\
1 & 0 & 2 & 2 & 5 & 5 & 6 & 6 & 3 & 3 & 4 & 4 \\
2 & 2 & 0 & 1 & 4 & 6 & 3 & 5 & 4 & 6 & 3 & 5 \\
2 & 2 & 1 & 0 & 6 & 4 & 5 & 3 & 6 & 4 & 5 & 3 \\
3 & 6 & 4 & 5 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 & 2 & 6 & 1 \\
3 & 6 & 5 & 4 & 3 & 0 & 5 & 2 & 2 & 4 & 1 & 6 \\
4 & 5 & 3 & 6 & 2 & 6 & 0 & 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \\
4 & 5 & 6 & 3 & 6 & 2 & 4 & 0 & 1 & 5 & 2 & 3 \\
6 & 3 & 4 & 5 & 4 & 2 & 6 & 1 & 0 & 3 & 2 & 5 \\
6 & 3 & 5 & 4 & 2 & 4 & 1 & 6 & 3 & 0 & 5 & 2 \\
5 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 & 2 & 6 & 0 & 4 \\
5 & 4 & 6 & 3 & 1 & 5 & 2 & 3 & 6 & 2 & 4 & 0
\end{pmatrix}$$

指標表は以下の通りである。

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	m_i
χ_1	1	1	2	2	2	2	2	1
χ_2	1	1	2	-1	-1	-1	-1	2
χ_3	1	-1	0	-1	-1	1	1	3
χ_4	2	0	-2	1	1	-1	-1	3

$T = \{s_0, s_1, s_2\}$ とすると $T \lhd S$ であり、T の指標表は

	s_0	gs_1	s_2	m_i
φ_1	1	1	2	1
φ_2	1	1	-2	1
φ_3	1	-1	0	2

である。このとき

$$\begin{array}{rclrcl} (\chi_1)_T &=& \varphi_1, & (\chi_2)_T &=& \varphi_1, \\ (\chi_3)_T &=& \varphi_3, & (\chi_4)_T &=& \varphi_2 + \varphi_3. \end{array}$$

である。

有限群の指標に関するクリフォードの定理では、二つの既約指標の正規部分群への制限が同じ既約成分を含むならば、その既約因子はすべて一致する。しかしこの例ではそうはなっていない。したがってアソシエーション・スキームとその正規閉部分集合に対して、有限群と同じようにクリフォードの定理が成り立つわけではない。クリフォードの定理を期待するならば、単なる正規閉部分集合ではなく、何らかの強い仮定が必要になる。ここでは強正規閉部分集合を考えることにする。

結果を述べるためにはいくつかの準備が必要である。まず [10] にしたがって群次数つき代数に関する説明をする。簡単のため、考える環は代数閉体 F 上の有限次元代数のみとし、また加群も F 上有限次元のもののみを考える。

G を有限群とする。F-代数 A が $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ と F-部分加群の直和に分解していて

(1) $g, h \in G$ に対して $A_g A_h \subseteq A_{gh}$

を満たすとき A を G-**次数つき代数** (graded algebra) という。A が G-次数つき代数であれば A_1 はその F-部分代数である。ここで等号が成り立つとき、すなわち

(2) $g, h \in G$ に対して $A_g A_h = A_{gh}$

であるとき A を G-**強次数つき代数** (strongly graded algebra) という。また G-次数つき代数 A が

(3) 任意の $g \in G$ に対して A_g は A の正則元 a_g を含む

という条件を満たせば、G が有限群であることなどから、これは (2) の条件を満たす。(3) を満たす G-次数つき代数は有限群 G の環 A_1 上の**接合積** (crossed product) として表されることが知られている [10, Theorem 5.10]。A が接合積であれば A は右加群と見ても、左加群と見ても A_1-自由で、基底として $\{a_g \mid g \in G\}$ を取ることができる。以下で接合積に関するクリフォード理論を証明なしに説明する。この部分を理解するためだけならば [10] よりも [8, §11] の方が分かりやすいだろう。

A を接合積とし $a_g \in A_g$ を A の正則元とする。既約右 A_1-加群 L 対して

$$L^A = L \otimes_{A_1} A = \bigoplus_{g\in G} L \otimes A_g = \bigoplus_{g \in G} L \otimes a_g$$

であり $L \otimes a_g$ は右 A_1-加群である。また $a'_g \in A_g$ も正則元であるとすると $L \otimes a_g \cong L \otimes a'_g$ が成り立つ。よって

$$H = \{g \in G \mid L \otimes a_g \cong L\}$$

は矛盾なく定義され G の部分群になる。このとき次が成り立つ。

定理 4.16 (接合積に関するクリフォードの定理)**.** A を接合積とし上の記号を用いる。M を既約右 A-加群とし L を M_{A_1} の既約部分加群とする。$H = \{g \in G \mid L \otimes a_g \cong L\}$ とおくとき次が成り立つ。

(1) M_{A_1} は半単純で、ある自然数 e に対して $M_{A_1} \cong e\left(\bigoplus_{g\in H\backslash G} L \otimes a_g\right)$ である。

(2) $B = \bigoplus_{h\in H} A_h$ とおく。このとき $\mathrm{IRR}(B \mid L) \to \mathrm{IRR}(A \mid L) \quad (N \mapsto N^A)$ は全単射である。

ただし、ここで $\mathrm{IRR}(B \mid L)$ は V_{A_1} が L を既約成分に含むような既約 B-加群 V 全体の集合であるとする。

(X, S) をアソシエーションスキームとし T を S の強正規閉部分集合とする。すなわち剰余スキーム $(X/T, S/\!\!/T)$ が細スキーム (本質的に有限群) であるとする。$G = S/\!\!/T$ とおいて、これを有限群と見る。このとき $S = \bigcup_{s^T \in S/\!\!/T} TsT$ は S の分割になる。

$$\mathbb{C}S = \bigoplus_{s^T \in S/\!\!/T} \mathbb{C}(TsT)$$

は自然に G-次数つき代数である。ただし $U \subset S$ に対して $\mathbb{C}U = \bigoplus_{s\in U} \mathbb{C}\sigma_s \subset \mathbb{C}S$ であるとする。もし、各 $\mathbb{C}(TsT)$ が $\mathbb{C}S$ の正則元を含むならば $\mathbb{C}S$ は接合積となり、クリフォードの定理が成り立つ。

例 4.17 (半直積に対するクリフォードの定理)**.** $(X,S)\Theta$ を [42, §2.7] で定義されているアソシエーション・スキームの半直積とする。このとき隣接代数は Θ に関する接合積であり、クリフォードの定理が成り立つ。また [3] の半直積についても、剰余スキームが細スキームならば同様である。

例 4.18 (半直積でない接合積)**.** 例 2.24 のアソシエーションスキームは半直積で書くことはできないが、強正規閉部分集合 $T=\{s_0,s_1\}$ について接合積で表される。したがってクリフォードの定理が成り立つ。

接合積でない場合のクリフォード理論を考える。まず例を見てみよう。

例 4.19. 関係行列

$$\begin{pmatrix}
0&1&2&2&3&3&4&4&5&5&6&6&7&7&7&7&7&7&8&8&8&8&8&8\\
1&0&2&2&4&4&3&3&6&6&5&5&7&7&7&7&7&7&8&8&8&8&8&8\\
2&2&0&1&5&6&5&6&3&4&3&4&8&8&8&8&8&8&7&7&7&7&7&7\\
2&2&1&0&6&5&6&5&4&3&4&3&8&8&8&8&8&8&7&7&7&7&7&7\\
3&4&6&5&0&3&4&1&2&6&5&2&7&7&7&7&7&7&8&8&8&8&8&8\\
3&4&5&6&3&0&1&4&6&2&2&5&7&7&7&7&7&7&8&8&8&8&8&8\\
4&3&6&5&4&1&0&3&5&2&2&6&7&7&7&7&7&7&8&8&8&8&8&8\\
4&3&5&6&1&4&3&0&2&5&6&2&7&7&7&7&7&7&8&8&8&8&8&8\\
6&5&3&4&2&5&6&2&0&4&3&1&8&8&8&8&8&8&7&7&7&7&7&7\\
6&5&4&3&5&2&2&6&4&0&1&3&8&8&8&8&8&8&7&7&7&7&7&7\\
5&6&3&4&6&2&2&5&3&1&0&4&8&8&8&8&8&8&7&7&7&7&7&7\\
5&6&4&3&2&6&5&2&1&3&4&0&8&8&8&8&8&8&7&7&7&7&7&7\\
7&7&8&8&7&7&7&7&8&8&8&8&0&1&3&3&4&4&2&2&5&5&6&6\\
7&7&8&8&7&7&7&7&8&8&8&8&1&0&4&4&3&3&2&2&6&6&5&5\\
7&7&8&8&7&7&7&7&8&8&8&8&3&4&0&3&1&4&5&6&2&6&2&5\\
7&7&8&8&7&7&7&7&8&8&8&8&3&4&3&0&4&1&6&5&6&2&5&2\\
7&7&8&8&7&7&7&7&8&8&8&8&4&3&1&4&0&3&6&5&2&5&2&6\\
7&7&8&8&7&7&7&7&8&8&8&8&4&3&4&1&3&0&5&6&5&2&6&2\\
8&8&7&7&8&8&8&8&7&7&7&7&2&2&6&5&5&6&0&1&4&3&3&4\\
8&8&7&7&8&8&8&8&7&7&7&7&2&2&5&6&6&5&1&0&3&4&4&3\\
8&8&7&7&8&8&8&8&7&7&7&7&6&5&2&5&2&6&4&3&0&4&1&3\\
8&8&7&7&8&8&8&8&7&7&7&7&6&5&5&2&6&2&3&4&4&0&3&1\\
8&8&7&7&8&8&8&8&7&7&7&7&5&6&2&6&2&5&3&4&1&3&0&4\\
8&8&7&7&8&8&8&8&7&7&7&7&5&6&6&2&5&2&4&3&3&1&4&0
\end{pmatrix}$$

で定義されるアソシエーション・スキームは次の指標表をもつ。

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	m_i
χ_1	1	1	2	2	2	2	2	6	6	1
χ_2	1	1	2	2	-2	-2	-2	-6	6	1
χ_3	1	1	2	2	-2	-2	-2	6	-6	1
χ_4	1	1	2	2	2	2	2	-6	-6	1
χ_5	1	1	-1	-1	-2	1	1	0	0	4
χ_6	1	1	-1	-1	2	-1	-1	0	0	4
χ_7	1	-1	-1	1	0	$\sqrt{-3}$	$-\sqrt{-3}$	0	0	4
χ_8	1	-1	-1	1	0	$-\sqrt{-3}$	$\sqrt{-3}$	0	0	4
χ_9	1	-1	2	-2	0	0	0	0	0	4

$T = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$, $U = \{s_0, s_1, \cdots, s_6\}$ とすると T, U は共に強正則である。$\chi_1, \cdots, \chi_4$ の上では接合積の場合と同じようにクリフォードの定理が成り立っているように見える。χ_9 は T の外では値が 0 となっている。χ_5, χ_6 の上では U まではクリフォードの定理が成り立っているように見えるが U の外では値が 0 となっている。χ_7, χ_8 も同様である。

この例で見たような状況が一般のアソシエーションスキームとその強正則閉部分集合に対して成り立つことを期待しているが、今のところ特別な場合にしか証明は出来ていない。以下では可換アソシエーションスキームのみを考える。

(X, S) を可換アソシエーションスキームとし T をその強正則閉部分集合とする。例 4.19 から考えると、代数全体を見るのではなく T の既約指標ごとに見た方が良いように感じられる。そこで $\varphi \in \mathrm{Irr}(T)$ に対して、対応する原始べき等元を e_φ とし

$$\mathbb{C}T = \bigoplus_{\varphi \in \mathrm{Irr}(T)} e_\varphi \mathbb{C}T, \quad \mathbb{C}S = \bigoplus_{\varphi \in \mathrm{Irr}(T)} e_\varphi \mathbb{C}S$$

なる直和分解を考える。可換性を仮定しているので、どちらも両側イデアルの直和である。$\mathrm{Irr}(S \mid \varphi)$ で T への制限が φ を既約成分に含むような S の既約指標の全体を表すことにする。指標を適当に同一視することによって、自然に $\mathrm{Irr}(e_\varphi \mathbb{C}T) = \{\varphi\}$, $\mathrm{Irr}(S \mid \varphi) = \mathrm{Irr}(e_\varphi \mathbb{C}S)$ である。よってこの二つの代数の間でクリフォード型の対応をみれば良い。

$$e_\varphi \mathbb{C}S = \bigoplus_{s^T \in S /\!\!/ T} e_\varphi \mathbb{C}(TsT)$$

と分解することによって $e_\varphi\mathbb{C}S$ は $S/\!\!/T$-次数つき代数になる。

$$Z/\!\!/T = \{s^T \in S/\!\!/T \mid e_\varphi\mathbb{C}(TsT) \neq 0\}$$

とおく。このとき次の補題が成り立つ。

補題 4.20. $s \in S$ に対して次は同値である。

(1) $e_\varphi\mathbb{C}(TsT) \neq 0$ である。

(2) ある $u \in TsT$ に対して $e_\varphi\sigma_u \neq 0$ である。

(3) $e_\varphi\mathbb{C}(TsT)$ は $e_\varphi\mathbb{C}S$ の正則元を含む。

(4) ある $u \in TsT$ に対して $e_\varphi\sigma_u$ は $e_\varphi\mathbb{C}S$ の正則元である。

Proof. (4) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (1) $\Longrightarrow$ (2) は自明である。(2) を仮定して (4) を示す。このとき可換性から、ある $\chi \in \mathrm{Irr}(S \mid \varphi)$ に対して $\chi(\sigma_u) \neq 0$ である。また $e_\varphi\sigma_u$ が $e_\varphi\mathbb{C}S$ の正則元であるための必要十分条件は、任意の $\xi \in \mathrm{Irr}(S \mid \varphi)$ に対して $\xi(\sigma_u) \neq 0$ であることである。したがってこれを示せばよい。

可換性から $S/\!\!/T$ はアーベル群で、$\mathrm{Irr}(S/\!\!/T)$ も自然にアーベル群の構造をもつ。定理 4.11 より $\mathrm{Irr}(S/\!\!/T)$ は $\mathrm{Irr}(S \mid \varphi)$ に作用する。この作用が可移であることを示す。$\chi \in \mathrm{Irr}(S \mid \varphi)$ を含む軌道を U とする。

$$U = \{\chi\tau \mid \tau \in \mathrm{Irr}(S/\!\!/T)\}$$

である。χ の固定部分群を Stab_χ と書くことにする。このとき

$$\begin{aligned}
e_U &= \sum_{\eta \in U} e_\eta = \frac{1}{|\mathrm{Stab}_\chi|} \sum_{\tau \in \mathrm{Irr}(S/\!\!/T)} \frac{m_\chi}{n_S} \sum_{s \in S} \frac{1}{n_s} \overline{\chi\tau(\sigma_s)}\sigma_s \\
&= \frac{1}{|\mathrm{Stab}_\chi|} \sum_{\tau \in \mathrm{Irr}(S/\!\!/T)} \frac{m_\chi}{n_S} \sum_{s \in S} \frac{1}{n_s} \overline{\chi(\sigma_s)\tau(\sigma_{s^T})}\sigma_s \\
&= \frac{m_\chi}{n_S|\mathrm{Stab}_\chi|} \sum_{s \in S} \frac{1}{n_s} \overline{\chi(\sigma_s)} \left(\sum_{\tau \in \mathrm{Irr}(S/\!\!/T)} \overline{\tau(\sigma_{s^T})} \right) \sigma_s
\end{aligned}$$

となるが $s \notin T$、すなわち $s^T \neq 1^T$、のとき σ_s の係数は 0 である。よって $e_U \in \mathbb{C}T$ となり e_φ が $\mathbb{C}T$ で原始的であることから $U = \mathrm{Irr}(S \mid \varphi)$ である。

したがって $\mathrm{Irr}(S \mid \varphi)$ の任意の元は $\chi\tau$, $\tau \in \mathrm{Irr}(S/\!\!/T)$ と書けて

$$\chi\tau(\sigma_u) = \chi(\sigma_u)\tau(\sigma_{u^T}) \neq 0$$

となる。 □

この補題によりただちに Z が閉部分集合 (すなわち $Z/\!\!/T$ が $S/\!\!/T$ の部分群) であることが分かり、また $e_\varphi \mathbb{C}S$ が $Z/\!\!/T$ の $e_\varphi \mathbb{C}T$ 上の接合積であることが分かる。よって以下の結果を得る。

定理 4.21 (可換スキームに対するクリフォードの定理)**.** (X, S) を可換アソシエーションスキームとし T を S の強正則閉部分集合とする。$\varphi \in \mathrm{Irr}(T)$ に対して

$$Z/\!\!/T = \{s^T \in S/\!\!/T \mid e_\varphi \mathbb{C}(TsT) \neq 0\}$$

とおく。このとき Z は S の閉部分集合で、次が成り立つ。

(1) $\xi \in \mathrm{Irr}(Z \mid \varphi)$ を一つ固定すれば

$$\mathrm{Irr}(Z \mid \varphi) = \{\xi\tau \mid \tau \in \mathrm{Irr}(Z/\!\!/T)\}$$

である。

(2) $\mathrm{Irr}(Z \mid \varphi) \to \mathrm{Irr}(S \mid \varphi) \quad (\eta \mapsto \eta^S)$ は全単射である。ここで $s \in Z$ に対しては $\eta^S(\sigma_s) = \eta(\sigma_s)$ であり、$s \notin Z$ に対しては $\eta^S(\sigma_s) = 0$ である。

(3) $\chi \in \mathrm{Irr}(S \mid \varphi)$ の重複度に関して

$$m_\chi = \frac{n_S}{n_Z} m_\varphi$$

が成り立つ。

未解決問題 4.22. 定理 4.21 (1) において $\xi \in \mathrm{Irr}(Z \mid \varphi)$ を一つ必要とするが、これを具体的に求める方法は分からない。

定理 4.21 の簡単な応用として以下を得る。

問 4.23. (X, S) を可換アソシエーションスキームとし T を S の強正則閉部分集合とする。このとき

$$|T| + |S/\!\!/T| - 1 \leq |S| \leq |T| \cdot |S/\!\!/T|$$

が成り立つ。特に $|T| + |S/\!\!/T| - 1 = |S|$ となるための必要十分条件は S が T による部分スキームと $S/\!\!/T$ のレス積と代数的に同型であることであり、また $|S| = |T| \cdot |S/\!\!/T|$ となるための必要十分条件は S の隣接代数が接合積となることである。これを証明せよ。

次に非可換の場合を考える。この場合には、あまり良い結果は得られていないが [11] の G-次数つき代数に関するクリフォードの理論が利用できる。しかし G-次数つき代数に関するクリフォードの理論においては、次数つき代数の既約表現とある加群の自己準同型環の既約表現が対応することが結論であり、可換スキームのように、その部分スキームの表現との対応が存在するわけではない。ここでは極めて簡単な場合、すなわち剰余スキームが素数位数である場合を考える。これは有限群における [27, Corollary 6.9] の一般化といえるが、有限群の場合ほど簡単ではなく、面白い例が現れる。G-次数つき代数に関するクリフォードの理論については、その証明などはせず、必要な定義などを与えるだけでその理論を利用することにする。

(X,S) をアソシエーション・スキームとし T を強正規閉部分集合とする。$G = S/\!\!/T$ とし、これを有限群と考える。

$$\mathbb{C}S = \bigoplus_{s^T \in S/\!\!/T} \mathbb{C}(TsT)$$

によって $\mathbb{C}S$ は G-次数つき代数である。$\mathbb{C}T$ は $\mathbb{C}S$ の 1^T-成分であり、$\mathbb{C}S$ の部分代数である。G が有限群なので [11, Theorem 12.10] により、任意の既約 $\mathbb{C}S$-加群は、ある既約 $\mathbb{C}T$ 加群の上にある ([11, §8] 参照)。

L を既約 $\mathbb{C}T$-加群とし、

$$L^S = L \otimes_{\mathbb{C}T} \mathbb{C}S = \bigoplus_{s^T \in S/\!\!/T} L \otimes \mathbb{C}(TsT)$$

を考える。L^S の任意の既約成分は L と同型な $\mathbb{C}T$-部分加群をもつので、L の上にある。L^S は完全可約なので、これも L の上にある。[11, Proposition 8.4] によって、恒等写像 $L^S \to L^S$ は 1-null socle $S_1(L^S)$ を核に含み、よって $S_1(L^S) = 0$ である。このことと [11, Proposition 7.8] によって、$L \otimes \mathbb{C}(TsT)$ は既約 $\mathbb{C}T$-加群、または 0 となる。

$$\begin{aligned}\mathrm{Supp}(L^S) &= \{s^T \in S/\!\!/T \mid L \otimes \mathbb{C}(TsT) \neq 0\} \\ G\{L\} &= \{s^T \in S/\!\!/T \mid (\mathbb{C}T\text{-加群として})\ L \otimes \mathbb{C}(TsT) \cong L\}\end{aligned}$$

とおく。$G\{L\}$ は G の部分群となるが $\mathrm{Supp}(L^A)$ は一般に部分群とはならず、いくつかの $G\{L\}$ による剰余類の和集合となる。$L \otimes \mathbb{C}(TsT)$ として得られる既約 $\mathbb{C}T$-加群は L と **G-共役**であるという。M を L の上にある既約 $\mathbb{C}S$-加群とすると、[11, Theorem 12.4] により、M の既約 $\mathbb{C}T$-部分加群は L と G-共役なものに限り、またその重複度はすべて等しく、$|G\{L\}|$ 以下とな

る。また [11, Theorem 12.4] により、L と G-共役な既約加群の同型類の個数は $|\mathrm{Supp}(L^S)|/|G\{L\}|$ で与えられ、特に、その個数は $|G : G\{L\}|$ 以下である。以上により、既約 $\mathbb{C}S$-加群 M の既約 $\mathbb{C}T$-成分の数は $|G|$ 以下であることも分かる [17, Theorem 2]。

ここで $p = |G|$ は素数であると仮定する。したがって G は巡回群であり、その部分群は自明なものに限る。以下では主に指標に関する考察をするため、$\varphi \in \mathrm{Irr}(T)$ に対して $\mathrm{Supp}(\varphi^S)$, $G\{\varphi\}$ を対応する加群を用いて定める。$\mathrm{Irr}(G) = \{\xi_i \mid i = 1, 2, \cdots, p\}$ とする。定理 4.11 により、任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ に対して $\chi\xi_i \in \mathrm{Irr}(S)$ であることに注意しておく。$\mathrm{Irr}(T)$ と $\mathrm{Irr}(S)$ の関係を調べるのがここでの目標である。

補題 4.24. $\varphi \in \mathrm{Irr}(T)$, $\chi \in \mathrm{Irr}(S \mid \varphi)$ とする。ある $s \in S - T$ があって $\chi(\sigma_s) \neq 0$ であるならば $\varphi^S = \sum_{i=1}^{p} \chi\xi_i$ である。

Proof. 仮定より $\chi\xi_i$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ はすべて異なる。任意の i について $(\chi\xi_i)_T = \chi_T$ であるからフロベニウス相互律により $\chi\xi_i$ は φ^S の既約因子である。G-次数つき代数の理論により $(\varphi^S)_T$ は高々 $p = |G|$ 個の既約因子しかもたない。よって φ^S の既約因子も高々 p 個であり、よって結果を得る。 □

補題 4.25. $\varphi \in \mathrm{Irr}(T)$ について $G\{\varphi\} = G$ と仮定する。このとき、ある $\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ が存在して $\chi_T = \varphi$, $\varphi^S = \sum_{i=1}^{p} \chi\xi_i$ となる。

Proof. ある $\chi \in \mathrm{Irr}(S \mid \varphi)$ があって、ある $s \in S - T$ に対して $\chi(\sigma_s) \neq 0$ となるならば補題 4.24 により結果が成り立つ。任意の $s \in S - T$ と任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(S \mid \varphi)$ に対して $\chi(\sigma_s) = 0$ であるとする。$G\{\varphi\} = G$ より、任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(S \mid \varphi)$ に対して $\chi_T = (\chi(1)/\varphi(1))\varphi$ であり、よって $\mathrm{Irr}(S \mid \varphi)$ の各指標はスカラー倍の違いしかない。しかし $\mathrm{Irr}(S)$ の任意の部分集合は一次独立であるから $|\mathrm{Irr}(S \mid \chi)| = 1$ となる。このとき $\varphi^S = a\chi$, $\chi \in \mathrm{Irr}(S \mid \varphi)$ と書くことができ $(\varphi^S)_T = a^2\varphi$ となる。しかし $(\varphi^S)_T = p\varphi$ であり p が素数であることによりこれは矛盾である。 □

補題 4.26. $\varphi \in \mathrm{Irr}(T)$ について $G\{\varphi\} = 1$ と仮定する。このとき $\varphi^S \in \mathrm{Irr}(S)$ である。$\chi = \varphi^S$ とすると、任意の $s \in S - T$ に対して $\chi(\sigma_s) = 0$ であり、χ_T は $|\mathrm{Supp}(\varphi^S)|$ 個の相異なる既約指標の和である。また χ_T の任意の既約因子 ψ に対して $\psi^S = \chi$ となる。

Proof. $G\{\varphi\} = 1$ であるから $(\varphi^S)_T$ の既約因子はすべて異なる。$\chi \in \mathrm{Irr}(S \mid \varphi)$ に対して、ある $s \in S - T$ があって $\chi(\sigma_s) \neq 0$ ならば補題 4.24 より $\chi_T = p\varphi$ となり矛盾である。したがって、任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(S \mid \varphi)$ と任意の

$s \in S - T$ に対して $\chi(\sigma_s) = 0$ である。このとき補題 4.25 の証明と同様に $\varphi^S = \chi \in \mathrm{Irr}(S)$ となる。

ψ を χ_T の既約因子とする。補題 4.24 により、ψ^S の任意の既約因子は $S - T$ で 0 となる。よって上と同様に $\psi^S = \chi$ を得る。 □

以上をあわせて次の定理が成り立つ。

定理 4.27. (X, S) をアソシエーション・スキームとし T を強正則閉部分集合とする。$G = S /\!\!/ T$ とおいて G の位数 p を素数と仮定する。$\mathrm{Irr}(G) = \{\xi_i \mid i = 1, 2, \cdots, p\}$ とおく。$\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ に対して以下のいずれかが成り立つ。

(1) $\chi_T \in \mathrm{Irr}(T)$ であり $(\chi_T)^S = \sum_{i=1}^{p} \chi\xi_i$

(2) 任意の $s \in S - T$ に対して $\chi(\sigma_s) = 0$ であり χ_T は高々 p 個の相異なる既約指標の和である。また χ_T の任意の既約因子 ψ に対して $\psi^S = \chi$ である。

定理 4.27 において (1) と (2) で $\mathrm{Supp}(\varphi^S) = G$ の場合は通常のクリフォード理論に現れる場合である。また (2) で $\mathrm{Supp}(\varphi^S) = 1$ の場合は、レス積の自明でない既約指標が典型的な例を与える。(2) で $1 \subsetneq \mathrm{Supp}(\varphi^S) \subsetneq G$ となるような例を次に与える。

例 4.28. $\mathbb{F}$ を 2^q 個の元をもつ有限体とする。乗法群 $\mathbb{F}^\times = \mathbb{F} - \{0\}$ は乗法によって $\mathbb{F}$ に作用する。議論を簡単にするために $p = 2^q - 1 = |\mathbb{F}^\times|$ を素数と仮定する。H を加法群 $\mathbb{F}$ と $\mathbb{F}^\times$ の半直積とする。K を $\mathbb{F}$ の位数 2^r の部分群とする。H とその部分群 H から得られるシュアー的スキームを (X, S) とする。また T を $\mathbb{F}$ に対応する S の閉部分集合とすれば、それは強正規であり $S /\!\!/ T$ は位数 p をもつ。H は 1 次でない既約指標 χ を唯一つもつ。定理 3.22 によって χ に対応する S の既約指標を χ' とする。このとき $\chi'(1) = 2^{q-r} - 1$ となる。$\varphi \in \mathrm{Irr}(T)$ を χ'_T の一つの既約因子とすれば $|\mathrm{Supp}(\varphi^S)| = \chi'(1)$ である。したがって $1 < q - r < q$ とすれば $1 \subsetneq \mathrm{Supp}(\varphi^S) \subsetneq S /\!\!/ T$ である。

4.5 いくつかの話題

ここでは指標理論に関係するいくつかの話題を簡単に取り上げる。

4.5.1 クラス 4 以下のアソシエーション・スキームの可換性

(X, S) をアソシエーション・スキームとする。$\mathbb{C}S$ は半単純であるから、その次元 $|S|$ は既約表現の次数の 2 乗の和である。自明な指標の次数は 1 である

から、$|S| \leq 4$ ならば、すべての既約指標の次数は 1 であり、よって (X, S) は可換である。また $|S| = 6$ の場合には、例えば 3 次対称群の群代数が非可換であり、非可換なスキームが存在する。$|S| = 5$ の場合には $5 = 1^2 + 2^2$ の可能性があるが、実はこれは起こらない。以下が成り立つ。

定理 4.29 ([22, (4.1)]). クラス 4 以下のアソシエーション・スキームは可換である。

これは以下の定理より明らかである。

定理 4.30. $|\mathrm{Irr}(S)| = 2$ ならば (X, S) はクラス 1 のスキームである。

Proof. $\mathrm{Irr}(S) = \{1_S, \chi\}$ とする。$|S| = 1 + \chi(1)^2$ である。$1 \neq s \in S$ について、その標準指標の値を考えれば

$$0 = \gamma_S(\sigma_s) = n_s + m_\chi \chi(\sigma_s)$$

が成り立つ。よって指標の値が代数的整数であることにより $\chi(\sigma_s) = -n_s/m_\chi \leq -1$ である。$\sigma_S = \sum_{s \in S} \sigma_s$ に対して $\chi(\sigma_S) = 0$ が成り立つので

$$0 = \chi(\sigma_S) = \chi(1) + \sum_{s \neq 1} \chi(\sigma_s) \leq \chi(1) - (|S| - 1) = \chi(1) - \chi(1)^2$$

である。したがって $\chi(1) = 1$ となり $|S| = 2$ である。 □

4.5.2 フロベニウス–シュアーの定理

有限群の指標に関するフロベニウス–シュアーの定理は自然にアソシエーション・スキームに拡張される。

(X, S) をアソシエーション・スキームとし $\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ とする。

$$\nu_2(\chi) = \frac{m_\chi}{n_S \chi(1)} \sum_{s \in S} \frac{1}{n_s} \chi({\sigma_s}^2)$$

とおく。このとき次が成り立つ。

定理 4.31 (フロベニウス–シュアーの定理 [22, (7.5)]). 上記の仮定の下で以下が成り立つ。

(1) $\nu_2(\chi) \in \{-1, 0, 1\}$ である。

(2) $\nu_2(\chi) = 0$ であることと $\chi \neq \overline{\chi}$ であることは同値である。

(3) $\nu_2(\chi) = 1$ であることと χ が実数体上の表現と同値であることは同値である。

(4) $\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} \nu_2(\chi)\chi(1) = \sharp\{s \in S \mid s^* = s\}$ である。

群の場合と違い、$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} \nu_2(\chi)\chi$ が何を意味するのかは分かっていない。係数体が複素数体でない場合については [29] を参照されたい。

問 4.32. $I(S) = \{s \in S \mid s^* = s,\ s \neq 1\}$ とおき、$|S| \neq 1$ と仮定する。このとき

$$\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathbb{C}S) = |\mathrm{Irr}(S)| \geq \frac{|I(S)|^2}{|S|-1} + 1$$

が成り立つことを証明せよ。([27, Theorem 4.11] を参考にせよ。)

4.5.3 バーンサイドの定理の拡張に対する反例

「有限群 G とその既約指標 χ について、$\chi(1) \neq 1$ ならば、ある $g \in G$ が存在して $\chi(g) = 0$ である。」これがよく知られたバーンサイドの定理 [27, Theorem 3.15] である。この定理のアソシエーション・スキームへの自然な拡張は成り立たない。以下がその例である。

例 4.33. 関係行列

$$\begin{pmatrix}
0&1&1&2&2&3&3&4&4&4&4&5&5&5&5&6&6&6&6&7&7&7&7&8&8&8&8\\
1&0&1&4&4&5&5&2&2&4&4&3&3&5&5&7&7&8&8&6&6&8&8&6&6&7&7\\
1&1&0&4&4&5&5&4&4&2&2&5&5&3&3&8&8&7&7&8&8&6&6&7&7&6&6\\
2&4&4&0&2&7&7&1&4&1&4&6&8&6&8&5&8&5&8&3&7&3&7&5&6&5&6\\
2&4&4&2&0&7&7&4&1&4&1&8&6&8&6&8&5&8&5&7&3&7&3&6&5&6&5\\
3&5&5&8&8&0&3&6&7&7&6&5&1&1&5&4&7&7&4&6&4&4&6&2&8&8&2\\
3&5&5&8&8&3&0&7&6&6&7&1&5&5&1&7&4&4&7&4&6&6&4&8&2&2&8\\
4&2&4&1&4&6&8&0&2&1&4&7&7&8&6&3&7&5&6&5&8&5&6&5&8&3&7\\
4&2&4&4&1&8&6&2&0&4&1&7&7&6&8&7&3&6&5&8&5&6&5&8&5&7&3\\
4&4&2&1&4&8&6&1&4&0&2&8&6&7&7&5&6&3&7&5&6&5&8&3&7&5&8\\
4&4&2&4&1&6&8&4&1&2&0&6&8&7&7&6&5&7&3&6&5&8&5&7&3&8&5\\
5&3&5&6&7&5&1&8&8&7&6&0&3&5&1&6&4&2&8&4&7&8&2&7&4&4&6\\
5&3&5&7&6&1&5&8&8&6&7&3&0&1&5&4&6&8&2&7&4&2&8&4&7&6&4\\
5&5&3&6&7&1&5&7&6&8&8&5&1&0&3&2&8&6&4&8&2&4&7&4&6&7&4\\
5&5&3&7&6&5&1&6&7&8&8&1&5&3&0&8&2&4&6&2&8&7&4&6&4&4&7\\
6&8&7&5&7&4&8&3&8&5&6&6&4&2&7&0&6&5&4&5&2&1&7&1&8&3&4\\
6&8&7&7&5&8&4&8&3&6&5&4&6&7&2&6&0&4&5&2&5&7&1&8&1&4&3\\
6&7&8&5&7&8&4&5&6&3&8&2&7&6&4&5&4&0&6&1&7&5&2&3&4&1&8\\
6&7&8&7&5&4&8&6&5&8&3&7&2&4&6&4&5&6&0&7&1&2&5&4&3&8&1\\
8&6&7&3&8&6&4&5&7&5&6&4&8&7&2&5&2&1&8&0&6&3&4&5&4&1&7\\
8&6&7&8&3&4&6&7&5&6&5&8&4&2&7&2&5&8&1&6&0&4&3&4&5&7&1\\
8&7&6&3&8&4&6&5&6&5&7&7&2&4&8&1&8&5&2&3&4&0&6&1&7&5&4\\
8&7&6&8&3&6&4&6&5&7&5&2&7&8&4&8&1&2&5&4&3&6&0&7&1&4&5\\
7&6&8&5&6&2&7&5&7&3&8&8&4&4&6&1&7&3&4&5&4&1&8&0&6&5&2\\
7&6&8&6&5&7&2&7&5&8&3&4&8&6&4&7&1&4&3&4&5&8&1&6&0&2&5\\
7&8&6&5&6&7&2&3&8&5&7&4&6&8&4&3&4&1&7&1&8&5&4&5&2&0&6\\
7&8&6&6&5&2&7&8&3&7&5&6&4&4&8&4&3&7&1&8&1&4&5&2&5&6&0
\end{pmatrix}$$

で定義されるアソシエーション・スキームの指標表は

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	m_i
χ_1	1	2	2	2	4	4	4	4	4	1
χ_2	1	2	-1	2	-2	4	-2	-2	-2	2
χ_3	1	2	2	-1	4	-2	-2	-2	-2	2
χ_4	1	2	-1	-1	-2	-2	1	1	1	4
χ_5	1	-1	-1	-1	1	1	-2	1	1	6
χ_6	2	-2	1	1	-1	-1	2	-1	-1	6

であり $\chi_6(1) = 2$ であるが、指標の値はすべて 0 ではない。

4.5.4 その他の話題

P- かつ Q-多項式スキームは応用上、特に重要とされていて、その分類は代数的組合せ論の大きな問題の一つとなっている。この問題に対する有力な道具と見られているのがタウィリガー代数である。その理論は難解で、このテキストの趣旨とはやや離れるので、ここではその定義のみを述べる。

(X, S) をアソシエーション・スキームとする。$x \in X$ を一つ固定する。$s \in S$ に対して $X_s = \{y \in X \mid (x, y) \in s\}$ とおけば X の分割 $X = \bigcup_{s \in S} X_s$ を得る。X で添字付けられた n_S 次対角行列 E_s を、$y \in X_s$ のとき $(E_s)_{yy} = 1$、そうでないとき $(E_s)_{yy} = 0$ として定める。$\{\sigma_s \mid s \in S\}$ と $\{E_s \mid s \in S\}$ で生成される $M_{n_S}(\mathbb{C})$ の部分代数を (X, S) の $x \in X$ に関する**タウィリガー代数** (Terwilliger algebra) という。タウィリガー代数も隣接代数と同様に半単純であるが、一般にその表現の様子を調べることは難しい。詳しくは [37], [38], [39] などを参照して欲しい。また、ここに述べた定義よりも一般的な定義も考えられ研究されている。

タウィリガー代数は隣接代数よりも多くの情報を含んでいるが、それとは逆に隣接代数の代数的な面のみに注目して一般化された代数も多く研究されている。その一つは**テーブル代数** (table algebra) である。テーブル代数については [2] を見て頂きたい。また別の視点からの一般化に**群的代数** (group-like algebra) [13] がある。

アソシエーション・スキームは homogeneous coherent configuration とも呼ばれるということは先に述べたが、単なる **coherent configuration** というものもある [22], [23]。これはその名前の通りアソシエーション・スキームを含む広い概念であり、アソシエーション・スキームに対して成り立つ多くのことが coherent configuration に対しても成り立つことが知られている。また **coherent algebra** という代数も定義されている [24]。

Chapter 5

モジュラー表現とその応用

正標数の体、またはある種の整数環上の隣接代数の表現を**モジュラー表現** (modular representation) という。有限群の場合と同じ様に、正標数の体を考えるだけでなく、標数 0 体上の表現と正標数の体上の表現の関係を考えることも重要になる。このために p-モジュラー系と呼ばれるものを用いるが、基本的な内容は有限群の場合と同じなので詳しくは書かない。[33] などを参照して頂きたい。

5.1 基本事項

p を素数とする。R を**完備離散付値環** (complete discrete valuation ring) とし、その商体 K の標数は 0 であるとする。R の極大イデアルを (π) とし、剰余体 $F = R/(\pi)$ の標数は p とする。このとき (K, R, F) を p-**モジュラー系** (p-modular system) という。K の**付値** (valuation) ν_p は $\nu_p(p) = 1$ を満たすものとする。また自然な準同型 $R \to R/(\pi) = F$ による $a \in R$ の像を a^* と書くことにする。p-モジュラー系 (K, R, F) がアソシエーション・スキーム (X, S) に対して十分に大きいとは、K, F が十分に大きく、閉部分集合や剰余スキームなどの考える隣接代数すべての分解体であるものとする。

隣接代数については $K(RS) = KS$, $RS/\pi RS \cong FS$ となる。

K の素体は $\mathbb{Q}$ であるとし、$\mathbb{Q}$ の K における代数閉包を K_0 とする。K_0 の $\mathbb{C}$ への適当な埋め込みを固定して考える。このとき (絶対) 既約指標の値はすべて K_0 に含まれるので $\mathrm{Irr}(\mathbb{C}S)$ と $\mathrm{Irr}(KS)$ を同一視することが出来る。このようにして、これまでの $\mathbb{C}$ 上の指標理論はすべて K 上でも成り立つ。

$T : RS \to M_n(R)$ をアソシエーション・スキーム (X, S) の R 上の表現と

する。T は自然に K 上の表現を引き起こす。これを T^K と書くことにする。また T は自然な準同型によって F 上の表現も引き起こす。これを T^F と書く。R-自由な RS-加群についても、同様に KS-加群、FS-加群が定まる。

$U : KS \to M_n(K)$ を (X, S) の K 上の表現とする。このとき、任意の $s \in S$ に対して $P^{-1}U(\sigma_g)P \in M_n(R)$ となるような $P \in GL_n(K)$ が存在する。この表現を U^P と書く。U^P は R 上の表現と見ることが出来る。加群の言葉で言えば以下のようになる。V を右 KS-加群とする。このとき V の R-自由な R-部分加群 W で $\dim_K V = \mathrm{rank}_R W$ かつ $KW = V$ となるものが存在する。この W を V の **R-形式** (R-form) という。KS-加群から R-形式を通して FS-加群が得られる。一般に、この FS-加群は R-形式の選び方に依存し、同型を除いても一意的ではない。しかし以下が成り立つ。

命題 5.1 ([33, Theorem 2.1.9])**.** KS-加群から R-形式を通して FS-加群を作るとき、その FS-加群の組成因子は一意的に決まる。

モジュラー表現において、隣接代数のべき等元は重要な役割をもつ。

定理 5.2 ([33, Theorem 1.4.1])**.** A を環とし e を A のべき等元とする。$e = e_1 + \cdots + e_n$ をべき等元分解とすれば、右イデアルの直和分解

$$eA = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$$

が得られる。逆に右イデアルの直和として

$$eA = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$$

であれば、べき等元分解 $e = e_1 + \cdots + e_n$ で $I_i = e_iA$ $(1 \leq i \leq n)$ となるものが存在する。

定理 5.3 ([33, Theorem 1.4.2])**.** 環 A のべき等元 e について、以下の条件は同値である。

(1) e は原始べき等元である。

(2) eA は右 A-加群として直既約である.

(3) 環 eAe の単位元は e のみである。

定理 5.4 ([33, Theorem 1.4.3])**.** e, f は環 A のべき等元、V は右 A-加群とする。このとき以下が成り立つ。

(1) アーベル群として $\mathrm{Hom}_A(eA, V) \cong Ve$ である。特に $\mathrm{Hom}_A(eA, fA) \cong fAe$ である。

(2) $\mathrm{End}_A(eA)$ は eAe と環として同型である。

定理 5.5 ([33, Theorem 1.4.4]). e, f は環 A のべき等元、V は右 A-加群とする。このとき、右 A-加群として $eA \cong fA$ であることと、左 A-加群として $Ae \cong Af$ であることは同値である。

環 A の**ジャコブソン根基** (Jacobson radical) を $\mathrm{Rad}(A)$ と書くことにする。

定理 5.6 ([33, Theorem 1.4.5]). A を環とし I は $\mathrm{Rad}(A)$ に含まれる A のイデアルとする。$\overline{A} = A/I$ とし、$a \in A$ の $\overline{A}$ への自然な準同型による像を $\overline{a}$ と書く。また e, f は A のべき等元とする。このとき、$eA \cong fA$ であることと $\overline{e}\overline{A} \cong \overline{fA}$ であることは同値である。

定理 5.7 ([33, Theorem 1.4.6]). 可換環 A の原始べき等元分解は一意的である。特に、可換環の任意のべき等元は中心的原始べき等元の和として、一意的に表される。

環 A の中心的べき等元分解は、A の中心 $Z(A)$ のべき等元分解に等しい。$1 = e_1 + \cdots + e_n$ を A における中心的べき等元分解とすれば、両側 (A, A)-加群として

$$A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$$

なる分解が得られ、しかも各 e_iA は両側 (A, A)-加群として直既約である。この直既約因子を環 A の**ブロック** (block) という。対応する中心的原始べき等元を**ブロックべき等元** (block idempotent) という。

A を環とし I をそのイデアルとする。$\overline{A} = A/I$ とおく。$\overline{A}$ のべき等元 $\overline{c}$ に対して、A のべき等元 e が存在して $\overline{c} = \overline{e}$ となるとき、$\overline{c}$ は A のべき等元に**持ち上げ可能** (liftable) であるという。

定理 5.8 ([33, Theorem 1.4.9, Theorem 1.4.10]). A を環とし I をそのべき零イデアルとする。このとき $\overline{A}$ の任意のべき等元は A のべき等元に持ち上げ可能である。$\overline{1} = \overline{c}_1 + \cdots + \overline{c}_n$ を $\overline{A}$ におけるべき等元分解とすれば、A のべき等元 e_i $(i = 1, \cdots, n)$ が存在して、$\overline{c}_i = \overline{e}_i$, $1 = e_1 + \cdots + e_n$ となる。

環 A の原始べき等元 e, f について $eA \cong fA$ のとき、e と f は**同値**であるという。この定理より体上の有限次元代数については、原始べき等元の同値類と既約加群の同型類は一対一に対応する。

p-モジュラー系 (K, R, F) とべき等元を考える。A を R-有限生成な R-代数とする。このとき $A/\pi A$ は F-上有限次元の F-代数となる。

定理 5.9 ([33, Theorem 1.14.1])**.** A を R-有限生成な R-代数とする。このとき

(1) $\pi A \subset \mathrm{Rad}(A)$.

(2) ある自然数 n に対して $\mathrm{Rad}(A)^n \subset \pi A$.

定理 5.10 ([33, Theorem 1.14.2])**.** A を R-有限生成な R-代数とする。I を $\mathrm{Rad}(A)$ に含まれるイデアルとし $\overline{A} = A/I$ とおく。このとき $\overline{A}$ の任意のべき等元は A のべき等元に持ち上げ可能である。$\overline{1} = \overline{c}_1 + \cdots + \overline{c}_n$ を $\overline{A}$ におけるべき等元分解とすれば、A のべき等元 e_i $(i = 1, \cdots, n)$ が存在して、$\overline{c_i} = \overline{e}_i$, $1 = e_1 + \cdots + e_n$ となる。

πA は一般にべき零ではないが、これによって $A/\pi A$ のべき等元は A に持ち上げ可能である。また中心的べき等元については以下が成り立つ。

定理 5.11 ([9, Proposition 1.12])**.** A を R-有限生成な R-代数とする。このとき $A/\pi A$ の中心的べき等元は A の中心的べき等元に持ち上げ可能である。

これによって隣接代数について、RS のブロックと FS のブロックが自然に対応することが分かる。RS のブロックを単に (X, S) の**ブロック**、または p-**ブロック**という。ブロックの全体を $\mathrm{Bl}(S)$ と書く。$B \in Bl(S)$ に対して、対応する FS のブロックを B^* と書く。ブロック B に対応する中心的原始べき等元を**ブロックべき等元** (block idempotent) といい e_B と書く。e_B^* は FS の中心的原始べき等元であり、これをブロックべき等元ということもある。

直既約右 FS-加群 W に対して、唯一つのブロック B が存在して $We_B^* \neq 0$ となる。このとき W は**ブロック** B **に属する**という。ブロック B に属する既約 FS-加群の全体を $\mathrm{IRR}(B^*)$ と書く。同様に既約右 KS-加群 V に対して、唯一つのブロック B が存在して $Ve_B \neq 0$ となる。このとき V は**ブロック** B **に属する**という。ブロック B に属する既約 KS-加群の全体を $\mathrm{IRR}(B)$ と書き、その指標全体を $\mathrm{Irr}(B)$ と書く。特に自明な表現 1_S の属するブロックを**主ブロック** (principal block) といい $B_0(S)$ と書く。

ブロックべき等元は KS の中心的べき等元であるから、中心的原始べき等元 e_χ $(\chi \in \mathrm{Irr}(S))$ の和で書くことが出来る。定義から明らかなように

$$e_B = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} e_\chi$$

である。また e_B が RS の中心的原始べき等元であることから、$\mathrm{Irr}(B)$ は $\sum_{\chi \in A} e_\chi \in RS$ となる $\mathrm{Irr}(S)$ の部分集合 A のうち、極小のものである。

5.2 分解行列とカルタン行列

(X, S) をアソシエーション・スキームとし、(K, R, F) は (X, S) に対して十分大きい p-モジュラー系とする。この節では加群はすべて右加群とするが、左加群についても同様である。V を既約 KS-加群、W を既約 FS-加群とする。V から R-形式を通して FS-加群 V^* を作り、V^* における W の既約成分としての重複度を d_{VW} と書く。d_{VW} を**分解定数** (decomposition number) と呼ぶ。既約 KS-加群、既約 FS-加群の同型類の代表系を、それぞれ $\mathrm{IRR}(KS)$, $\mathrm{IRR}(FS)$ と書くことにする。行、列がそれぞれ $\mathrm{IRR}(KS)$, $\mathrm{IRR}(FS)$ で添字付けられた行列で、その (V, W)-成分が d_{VW} であるもの $D = (d_{VW})$ を (X, S) の**分解行列**という。

$\overline{FS} = FS/\mathrm{Rad}FS$ とする。既約 FS-加群 W は既約 $\overline{FS}$-加群と見ることが出来る。よってある $\overline{FS}$ の原始べき等元 $\overline{e}$ が存在して $W \cong \overline{e}\overline{FS}$ である。e を $\overline{e}$ の FS への持ち上げとする。このとき eFS は W の射影被覆で $eFS/\mathrm{Rad}(FS)FS \cong W$ である。eFS における既約 FS-加群 W' の既約成分としての重複度を $c_{WW'}$ と書く。$c_{WW'}$ を**カルタン不変数** (Cartan invariant) と呼ぶ。行、列ともに $\mathrm{IRR}(FS)$ で添字付けられた行列で、その (W, W')-成分が $c_{WW'}$ であるもの $C = (c_{WW'})$ を (X, S) の**カルタン行列**という。

定理 5.12. 上記の記号の下で $C = {}^tDD$ である。特にカルタン行列 C は対称行列である。

Proof. 上記のように $W \cong \overline{e}_W\overline{FS}$ となる FS のべき等元 e_W をとる。また e_W の RS への持ち上げを f_W とし、これを KS の元と見る。

$$f_W KS \cong \bigoplus_{V \in \mathrm{IRR}(KS)} a_{VW} V$$

とする。V の R-形式を V^R と書くことにして [33, Theorem 2.3.8] を使えば

$$\begin{aligned} a_{VW} &= \dim_K \mathrm{Hom}_{KS}(f_W KS, V) = \dim_K V f_W = \mathrm{rank}_R V^R f_W \\ &= \dim_F \left(V^R/\pi V^R\right) e_W = \dim_F \mathrm{Hom}_{FS}(e_W FS, V^R/\pi V^R) = d_{VW} \end{aligned}$$

である。二つの加群 A, B について、その既約成分が等しいことを $A \leftrightarrow B$ と書くことにすれば

$$e_W FS \leftrightarrow \bigoplus_{V \in \mathrm{IRR}(KS)} d_{VW} V^R/\pi V^R \leftrightarrow \bigoplus_{V \in \mathrm{IRR}(KS)} \bigoplus_{W' \in \mathrm{IRR}(FS)} d_{VW} d_{VW'} W'$$

となり、結果を得る。 □

有限群の群代数は対称代数であり、一般の代数と比べてとても良い性質を多くもっている。隣接代数は一般に対称代数ではないが、この定理によってそのカルタン行列は対称行列となり、その構造には強い制限が与えられる。例えば遺伝的代数は、半単純であるときを除いて、そのカルタン行列が対称行列とはならないので、隣接代数のブロックには現れない。

有限群の群代数のカルタン行列は常に正則で、その単因子には p のべきだけが現れる。アソシエーション・スキームに関してはカルタン行列は必ずしも正則ではない。またその単因子は p のべきとは限らず、その様子は分かっていない。

5.3 判別式とフレーム数

$\mathcal{O}$ を単項イデアル整域とする。$\mathcal{O}$-自由 $\mathcal{O}$-有限生成 $\mathcal{O}$-代数 A を考える。A の $\mathcal{O}$-基底を $\{a_1, \cdots, a_n\}$ とする。また V を $\mathcal{O}$-自由 $\mathcal{O}$-有限生成 A-加群とする。このとき V から行列表現 $T : A \to M_d(\mathcal{O})$ が得られる。T の指標を χ_T と書くことにする。A の基底 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ と加群 V に関する (あるいは表現 T に関する) **判別式** (discriminant) を

$$D_{V,\{a_1,\cdots,a_n\}}(A) = \det(\chi_T(a_i a_j))$$

で定める。

$\{b_1, \cdots, b_n\}$ を別の基底とし、基底の変換行列を P とすれば、容易に分かるように $(\det P)^2 D_{V,\{a_1,\cdots,a_n\}}(A) = D_{V,\{b_1,\cdots,b_n\}}(A)$ が成り立つ。特に $\mathcal{O} = \mathbb{Z}$ ならば、判別式の値は基底のとり方に依存しない。また任意の係数環上で、判別式の値が 0 であるかどうかは基底のとり方に依らない。

例 5.13. k を有限次代数体とし $\mathcal{O}_k$ をその整数環とする。$\mathcal{O}_k$ の $\mathbb{Z}$-代数としての判別式は代数体の判別式に等しい。

定理 5.14 ([14, Theorem 6.3.4])**.** 体 k 上有限次元代数 A について、A が分離的であることと、0 でない判別式をもつ加群が存在することは同値である。

問 5.15. A を体 k 上分解型半単純代数とする。すなわち $A \cong \bigoplus_{\ell=1}^{r} M_{d_i}(k)$ である。このとき $V = \bigoplus_{W\in\mathrm{IRR}(A)} W$ とすれば、任意の基底について V に関する判別式の値は 0 ではない。これを証明せよ。

アソシエーション・スキーム (X, S) の隣接代数 $\mathbb{C}S$ の基底 $\{\sigma_s \mid s \in S\}$ と標準加群 $\mathbb{C}X$ に関する判別式を計算する。標準表現のトレース、すなわち

標準指標 γ_S について $\gamma_S(\sigma_s) = \delta_{1s} n_S$ である。$\gamma_S(\sigma_s\sigma_t) = \delta_{st^*} n_s n_S$ である。よって

$$D_{\mathbb{C}X,\{\sigma_s\}}(\mathbb{C}S) = \varepsilon {n_S}^{|S|} \prod_{s \in S} n_s, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}$$

である。

直和分解 $\mathbb{C}S \cong \bigoplus_{\ell=1}^r M_{d_\ell}(\mathbb{C})$ を考え、簡単のためこれを同一視する。直和因子 $M_{d_\ell}(\mathbb{C})$ の行列単位を $e_{ij}^{(\ell)}$ と書くことにすれば $\{e_{ij}^{(\ell)} \mid 1 \leq i, j \leq d_\ell, 1 \leq \ell \leq r\}$ は $\mathbb{C}S$ の基底である。直和因子 $M_{d_\ell}(\mathbb{C})$ を対角線上に並べた行列は $\mathbb{C}S$ の表現となり、非同型な既約 $\mathbb{C}S$-加群の直和に対応する。この加群を V とする。基底 $\{e_{ij}^{(\ell)}\}$ と V に関する判別式を計算する。$M_{d_m}(\mathbb{C})$ に対応する既約指標を χ_m とすれば、V に対応する指標は $\sum_{m=1}^r \chi_m$ なので $\sum_{m=1}^r \chi_m(e_{ij}^{(\ell)} e_{i'j'}^{(\ell')}) = \delta_{ij'}\delta_{i'j}\delta_{\ell\ell'}$ であり、よって

$$D_{V,\{e_{ij}^{(\ell)}\}}(\mathbb{C}S) \in \{-1, 1\}$$

となる。(問 5.15 参照。)

次に基底 $\{e_{ij}^{(\ell)}\}$ と標準加群に関する判別式を計算する。標準加群に対応する指標は $\gamma_S = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} m_\chi \chi$ なので、

$$\gamma_S(e_{ij}^{(\ell)} e_{i'j'}^{(\ell')}) = \delta_{ij'}\delta_{i'j}\delta_{\ell\ell'} m_\ell$$

である。したがって判別式は

$$D_{\mathbb{C}X,\{e_{ij}^{(\ell)}\}}(\mathbb{C}S) = \varepsilon \prod_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} {m_\chi}^{\chi(1)^2}, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}$$

となる。

基底 $\{\sigma_s\}$ と $\{e_{ij}^{(\ell)}\}$ の変換行列を P とする。$D_{\mathbb{C}X,\{\sigma_s\}}(\mathbb{C}S)$ と $D_{\mathbb{C}X,\{e_{ij}^{(\ell)}\}}(\mathbb{C}S)$ をくらべて

$$(\det P)^2 = {n_S}^{|S|} \frac{\prod_{s \in S} n_s}{\prod_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} {m_\chi}^{\chi(1)^2}}$$

である。以上を併せて

$$|D_{V,\{\sigma_s\}}(\mathbb{C}S)| = {n_S}^{|S|} \frac{\prod_{s \in S} n_s}{\prod_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} {m_\chi}^{\chi(1)^2}}$$

となる。これを (X, S) の**フレーム数** (Frame number) といい $\mathcal{F}(S)$ と書くことにする。

(K,R,F) を十分大きな p-モジュラー系とすると、上記の内容は KS について成り立つ。V の R-形式を V^R と書くことにすると、明らかに $D_{V^R,\{\sigma_s\}}(RS) = D_{V,\{\sigma_s\}}(KS)$ であるから、$\mathcal{F}(S) \in R$ である。これが任意の素数 p について成り立つので $\mathcal{F}(S)$ は代数的整数である [33, Theorem 1.13.12]。また $\mathcal{F}(S)$ は有理数であるから、それは有理整数となる。

定理 5.16. フレーム数 $\mathcal{F}(S)$ は有理整数である。

${n_S}^{-2}\mathcal{F}(S)$ を**フレーム商** (Frame quotient) という。更に強く以下が成り立つ。

定理 5.17 ([21])**.** フレーム商 ${n_S}^{-2}\mathcal{F}(S)$ は有理整数である。

Proof. $\mathbb{Z}S$ の $\mathbb{Z}$-基底として $\{\sigma_S\} \cup \{\sigma_s \mid s \neq 1\}$ を考える。フレーム数を定義するための加群 V の指標は $\rho = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(S)} \chi$ である。$\chi \neq 1_S$ に対して $\chi(\sigma_S) = 0$ であるから $\rho(\sigma_S) = 1_S(\sigma_S) = n_S$ である。$\rho({\sigma_S}^2) = {n_S}^2$, $\rho(\sigma_S\sigma_s) = \rho(\sigma_s\sigma_S) = \rho(n_s\sigma_S) = n_s n_S$ であるから、判別式を定義する行列式の σ_S に対応する行と列は n_S で割り切れる。他の成分はすべて代数的整数なので、その行列式は ${n_S}^2$ で割り切れる。 □

アソシエーション・スキーム (X,S) が可換であれば、フレーム数を定義するための加群 V は正則加群に同型である。したがって、このとき任意の係数環上でこの議論が成り立ち、特に次の結果を得る。

定理 5.18. (X,S) が可換であれば、フレーム数 $\mathcal{F}(S)$ は有理整数環 $\mathbb{Z}$ 上の隣接代数 $\mathbb{Z}S$ の正則加群に対する判別式の絶対値に等しい。

計算機などを用いて可換スキームのフレーム数を求めるには、以下の計算を行う。正則表現の指標は $\sigma_s \mapsto \sum_{u\in S} p^u_{us}$ で与えられる。よって $\sigma_s\sigma_t$ の値は $\sum_{u\in S}\sum_{v\in S} p^u_{st}p^v_{vu}$ である。したがってフレーム数は

$$\mathcal{F}(S) = \det\left(\sum_{u\in S}\sum_{v\in S} p^u_{st}p^v_{vu}\right)_{st}$$

となる。

未解決問題 5.19. 非可換スキームに対して、その指標の様子を調べることなしにフレーム数を計算する方法は得られていない。

可換スキームについては更に次の定理が成り立つ。

定理 5.20 ([4, p.74])**.** (X,S) を可換スキームとする。$A=(\chi(\sigma_s))$ をその指標表とし、これを行列と見る。このとき $\mathcal{F}(S)=(\det A)\overline{(\det A)}$ である。

Proof. N を行、列ともに S で添字付けられた対角行列で、その対角成分が $1/n_s$ であるものとする。指標の直交関係より $AN^t\overline{A}$ の (χ,φ)-成分は

$$\sum_{s\in S}\frac{1}{n_s}\chi(\sigma_s)\overline{\varphi(\sigma_s)}=\delta_{\chi\varphi}\frac{n_S}{m_\chi}$$

である。よってこの行列の行列式を考えれば結果を得る。 □

5.4 半単純性判定定理

有限群の標数 p の体 F 上の群代数 FG が半単純になるためには p が $|G|$ を割らないことが必要十分である (マシュケの定理 [33, Theorem 3.1.12])。隣接代数に対して同様の半単純性判定を考える。

(X,S) をアソシエーション・スキームとし、(K,R,F) は十分大きな p-モジュラー系とする。また ν_π を $\nu_\pi(\pi)=1$ なる K の付値とする。$KS\ni a=\sum_{s\in S}a_s\sigma_s$ に対して $\nu_\pi(a)=\min\{\nu_\pi(a_s)\mid s\in S\}$ とする。$a,b\in KS$ に対して、明らかに

$$\nu_\pi(ab)\geq\nu_\pi(a)+\nu_\pi(b),\quad \nu_\pi(a+b)\geq\min\{\nu_\pi(a),\nu_\pi(b)\}$$

である。

補題 5.21. 任意の $\chi\in\mathrm{Irr}(S)$ に対して $\nu_\pi(e_\chi)\leq 0$ である。FS が半単純ならば $\nu_\pi(e_\chi)=0$ である。

Proof. $\nu_\pi(e_\chi)>0$ とすると $\nu_\pi(e_\chi)<\nu_\pi({e_\chi}^2)=\nu_\pi(e_\chi)$ で矛盾である。FS を半単純とし $\nu_\pi(e_\chi)=-\ell<0$ とする。$\nu_\pi(\pi^\ell e_\chi)=0$ である。$I=\pi^\ell e_\chi RS$ とおくと $I^*=I/\pi I\neq 0$ で I^* はべき零となる。これは FS が半単純であることに反する。 □

定理 5.22. FS が半単純ならば $\mathrm{IRR}(KS)$ と $\mathrm{IRR}(FS)$ の間に自然な全単射がある。

Proof. KS, FS 共に半単純なので、その既約加群は中心的原始べき等元に対応する。補題 5.21 より $\{e_\chi^*\mid\chi\in\mathrm{Irr}(S)\}$ は FS の互いに直交する中心的べき等元である。よって $\dim_K Z(KS)\geq\dim_F Z(FS)$ である。一方 FS の中心的べき等元は RS に持ち上げ可能であるから $\dim_K Z(KS)\leq\dim_F Z(FS)$ である。よって $\dim_K Z(KS)=\dim_F Z(FS)$ であり、$\{e_\chi^*\mid\chi\in\mathrm{Irr}(S)\}$ は FS の中心的原始べき等元のすべてとなる。 □

次の定理がこの節の主定理である。

定理 5.23. F を標数 $p > 0$ の体とする。このとき FS が半単純であることと p がフレーム数 $\mathcal{F}(S)$ を割り切らないことは同値である。

Proof. F は十分大きいと仮定して良い。p がフレーム数 $\mathcal{F}(S)$ を割り切らないならば定理 5.14 より FS は半単純である。FS が半単純であると仮定する。$V = \bigoplus_{W \in \mathrm{IRR}(KS)} W$ とおき、V の R-形式を通して得られる FS-加群を V^* と書くことにする。このとき FS の半単純性と定理 5.22 より $V^* \cong \bigoplus_{U \in \mathrm{IRR}(FS)} U$ としてよい。このとき、問 5.15 より $0 \neq D_{V^*,\{\sigma_s\}}(FS) = D_{V,\{\sigma_s\}}(KS)^* = \mathcal{F}(S)^*$ である。 □

一般にフレーム数を計算することは簡単ではないので定理 5.23 によって半単純性を判定することは難しい。以下のような場合には簡単にその判定を行うことが出来る。

命題 5.24. (X, S) をアソシエーション・スキーム、F を標数 $p > 0$ の体とする。

(1) $p \mid n_S$ ならば FS は半単純ではない。

(2) $p \nmid n_S$ であり、任意の $s \in S$ に対して $p \nmid n_s$ であるならば FS は半単純である。

Proof. $p \mid n_S$ とすると $F\sigma_S$ がべき零イデアルとなり、FS は半単純ではない。$p \nmid n_S$, $p \nmid n_s$ $(s \in S)$ ならばフレーム数が p で割り切れず、FS は半単純である。 □

未解決問題 5.25. 細スキーム、すなわち有限群のフレーム数は群の位数よりもかなり大きくなる。定理 5.23 におけるフレーム数と同じ役割を持ち、有限群に対してはその位数を与えるような、よりよい不変量を考察せよ。

定理 5.26. (X, S) をアソシエーション・スキーム、p を素数、F を標数 p の体とする。また ν_p は $\nu_p(p) = 1$ である付値である。このとき、非負有理整数 ℓ に対して

$$\sum_{\nu_p(m_\chi) \geq \ell} \chi(1)^2 \leq \sharp\{s \in S \mid \nu_p(n_S n_s) \geq \ell\}$$

が成り立つ。また、任意の ℓ に対してこの不等式の等号が成立することと FS が半単純であることは同値である。

Proof. (K,R,F) を十分大きい p-モジュラー系とする。補題 2.11 の記号を用いる。

$$\begin{array}{rclcrcl} M &=& (\delta_{(\chi,\rho,\tau),(\varphi,\mu,\xi)} m_\chi)_{(\chi,\rho,\tau),(\varphi,\mu,\xi)}, & & N &=& (\delta_{ts} n_S n_s)_{t,s}, \\ \Delta &=& (\alpha^\chi_{\rho\tau}(\sigma_s))_{(\chi,\rho,\tau),s}, & & \Delta^* &=& (\alpha^\chi_{\tau\rho}(\sigma_{s^*}))_{(\chi,\rho,\tau),s} \end{array}$$

とおく。M において m_χ は $\chi(1)^2$ 回繰り返し現れることに注意しておく。KS の既約表現をその R-形式に対応するものにとれば、これらの行列はすべて R の元を成分に持つとしてよい。補題 2.11 の証明中の A, B はそれぞれ $A=\Delta$, $B=M\Delta^*N^{-1}$ と書けるので、${}^tAB=I$ は

$$N={}^t\Delta M\Delta^*$$

と書き直せる。デデキント整域上の単因子論 (例えば [7, §22]) より N の i-番目の単因子は M の i-番目の単因子で割り切れ、よって一つ目の主張が成り立つ。

$\nu_p(n_S)>0$ ならば FS は半単純ではない。またこのとき $\sharp\{s\in S \mid \nu_p(n_S n_s)\geq 1\}=|S|$ であるが $m_{1_S}=1$ なので $\ell=1$ に対して等号は成立しない。

$\nu_p(n_S)=0$ とする。このとき、示された不等式とフレーム数の整数性から、FS が半単純であることと、任意の ℓ に対して等号が成立することが同値であることは明らかであろう。 □

5.5 標準加群

この節では正標数の体上の標準加群を考える。(K,R,F) を十分に大きい p-モジュラー系とする。

定理 5.27. (X,S) をアソシエーション・スキームとし $n_S=p^a m$, $p\nmid m$ とする。また e^* を FS のべき等元とする。このとき $p^a \mid \dim_F FXe^*$ が成り立つ。もし e^* が原始べき等元であるならば $\dim_F FXe^*$ は、標準加群 FX における既約 FS-加群 $e^*FS/e^*\mathrm{Rad}(FS)$ の既約成分としての重複度に等しい。

Proof. e を e^* の RG への持ち上げとする。このとき

$$\dim_F FXe^*=\mathrm{rank}_R RXe=\mathrm{rank}_R\Gamma_S(e)=\gamma_S(e)$$

である。ただし、ここで Γ_S, γ_S はそれぞれ標準表現、標準指標を表す。$e=\sum_{s\in S}a_s\sigma_s$ とすると $a_s\in R$ であり $\gamma_S(e)=a_1 n_S$ である。よって $R\ni a_1=\dim_F FXe^*/n_S$ となり $p^a\mid \dim_F FXe^*$ が成り立つ。

e^* が原始的ならば $FXe^* \cong \mathrm{Hom}_{FS}(e^*FS, FX)$ であるから、e^* が原始的ならば、これは e^* に対応する既約 FS-加群の FX における既約因子としての重複度となり後半の主張が成り立つ。([33, Theorem 2.3.8] 参照。) □

次の二つの系はすぐに分かる。

系 5.28. n_S が p^a で割り切れるとする。このとき、任意の既約右 FS-加群 V について、その標準加群 FX における既約成分としての重複度は p^a で割り切れる。

系 5.29. (X, S) をアソシエーション・スキームとし $n_S = p^a m$, $p \nmid m$ とする。このとき $|\mathrm{IRR}(FS)| \leq m$ である。特に n_S が p-べきならば FS は局所環である。

例 5.30. (X, S) を位数 $p^a m$ $(p \nmid m)$ の有限アーベル群から得られる細スキームとすると、FS は非同型な既約加群をちょうど m 個もつ。よってこの意味で系 5.29 の評価 $|\mathrm{IRR}(FS)| \leq m$ は最良である。

定理 5.27 をブロックべき等元に適用し、指標の言葉で表せば以下を得る。

系 5.31. n_S が p^a で割り切れるとする。このとき $B \in \mathrm{Bl}(S)$ に対して

$$p^a \mid \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} m_\chi \chi(1)$$

が成り立つ。

一般に二つの既約指標が同じブロックに属するかどうかを判定するのは簡単なことではない。しかし可換スキームについては次のことが成り立つ。

定理 5.32. (X, S) を可換スキームとする。$\chi\varphi \in \mathrm{Irr}(S)$ が同じブロックに属するための必要十分条件は

$$\chi(\sigma_s) \equiv \varphi(\sigma_s) \pmod{(\pi)}$$

が、任意の $s \in S$ に対して成り立つことである。

Proof. (X, S) が可換ならば FS は可換環である。可換環のブロックは局所環であり、ただ一つの既約表現をもつ。したがって χ と φ が同じブロックに属するための必要十分条件は $\chi^* = \varphi^*$ である。 □

一般に代数的に同型な二つのアソシエーション・スキームが同型であるか、非同型であるかを判定するのは難しい。

未解決問題 5.33. 代数的に同型な二つのアソシエーション・スキームを区別するための良い不変量を考えよ。

この問題に対して標準加群を利用する方法を簡単に解説する。複素数体 $\mathbb{C}$ 上の標準加群は、その指標表によって完全に決まるので、代数的に同型ならばそれを区別することは出来ない。しかし正標数の体や整数環上では区別できる可能性がある。実際 [6], [36] では、隣接代数 FS のある元の行列としてのランクを調べることによって代数的に同型なものを区別できる例を示している。また [20] では、上記の結果は標準加群の構造を調べることによって得られることを指摘し、ランクでは区別できないが加群の構造によって区別できるような例を与えている。また有理整数環、あるいは適当な整数環上で行列の単因子を調べれば、それはランクよりも多くの情報を含んでいる。実際、ランクで区別されず単因子で区別される例も見付かっている。整数環上での標準加群を考えればより良い情報が得られると思われるが、現在のところ、そのような研究は行われていないようである。一般に整数環上での表現論は難しい。

5.6 素数位数アソシエーション・スキーム

この節では素数位数アソシエーション・スキームの構造について述べる。まず、その可換性を示し、続いて分解体が円分体にとれるという仮定の下でその指標表を決定する。なお素数位数のシュアー的スキームはサイクロトミックスキーム (例 1.14) に限ることが知られている ([5, Corollary 2.10.2] または [35, Theorem 7.3] を参照)。また現在知られている素数位数スキームはすべてサイクロトミック・スキームに代数的に同型である。

p を素数とし (X,S) を $n_S = p$ であるアソシエーション・スキームとする。

補題 5.34. 任意の $s \in S$ について、σ_s の標数 p の体上での固有値は n_s に等しい。

Proof. F を標数 p の体とする。F は十分大きいと仮定してよい。このとき系 5.29 によって FS は局所環である。したがって FS の既約表現は自明な表現のみである。よって固有値は F において n_s に等しい。 □

補題 5.35. S の自明でない二つの既約指標は代数共役である。特にその重複度は等しい。

Proof. F を標数 p の十分に大きい体とする。代数共役でない二つの自明でない既約指標 φ, ψ が存在したとする。φ のすべての代数共役の和を Φ と

し、ψ のすべての代数共役の和を Ψ とする。$\Phi(\sigma_s) \in \mathbb{Z}$, $\Psi(\sigma_s) \in \mathbb{Z}$ が任意の $s \in S$ について成り立つ。補題 5.34 より σ_s の F 上での固有値は n_s に等しいので、ある $u_s, v_s \in \mathbb{Z}$ が存在して

$$\Phi(\sigma_s) = \Phi(1)n_s - u_s p, \quad \Psi(\sigma_s) = \Psi(1)n_s - v_s p$$

となる。直交関係 (定理 2.12) によって

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{s\in S} \frac{1}{n_s} 1_S(\sigma_{s^*})\Phi(\sigma_s) = \sum_{s\in S} \Phi(\sigma_s) \\ &= \sum_{s\in S} (\Phi(1)n_s - u_s p) = p\left(\Phi(1) - \sum_{s\in S} u_s\right). \end{aligned}$$

である。Ψ についても同様の式が成り立ち以下の式が成り立つ。

$$\sum_{s\in S} u_s = \Phi(1), \quad \sum_{s\in S} v_s = \Psi(1)$$

再び直交関係を考えれば

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{s\in S} \frac{1}{n_s}\Phi(\sigma_{s^*})\Psi(\sigma_s) = \sum_{s\in S} \frac{1}{n_s}(\Phi(1)n_{s^*} - u_{s^*}p)(\Psi(1)n_s - v_s p) \\ &= \sum_{s\in S} \Phi(1)\Psi(1)n_s - \sum_{s\in S} \Phi(1)v_s p - \sum_{s\in S} \Psi(1)u_{s^*}p + \sum_{s\in S} \frac{1}{n_s} u_{s^*}v_s p^2 \\ &= p\Phi(1)\Psi(1) - p\Phi(1)\Psi(1) - p\Phi(1)\Psi(1) + \sum_{s\in S} \frac{1}{n_s} u_{s^*}v_s p^2 \\ &= -p\Phi(1)\Psi(1) + \sum_{s\in S} \frac{1}{n_s} u_{s^*}v_s p^2 \end{aligned}$$

となり

$$\Phi(1)\Psi(1) = \sum_{s\in S} \frac{1}{n_s} u_{s^*}v_s p$$

である。$1 \leq \Phi(1) < p$, $1 \leq \Psi(1) < p$, $1 \leq n_s < p$ であるから、この式の左辺は p と素で、右辺は p の倍数となる。これは矛盾であるからすべての自明でない既約指標は代数共役である。 □

次の補題は素数位数スキームでなくても成り立つ。

補題 5.36 ([4, Theorem II.4.3])**.** S の自明でないすべての既約指標の重複度が等しいならば、S は可換で、自明でないすべての関係の分岐指数 n_s は等しい。

Proof. 任意の $1_S \neq \chi \in \mathrm{Irr}(S)$ に対して $m_\chi = m$ とする。一般に $n_S = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} m_\chi \chi(1)$ であるから、$n_S = 1 + m\sum_{\chi \neq 1_S} \chi(1)$ である。よって n_S は m と互いに素である。また $\sum_{\chi \neq 1_S} \chi(1) \leq \sum_{\chi \neq 1_S} \chi(1)^2 = |S| - 1$ であり、この不等式で等式が成り立つことと、任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(S) \setminus \{1_S\}$ について $\chi(1) = 1$ となること、すなわち S が可換であることは同値である。

フレーム数は

$$\mathcal{F}(S) = {n_S}^{|S|} \frac{\prod_{s \in S} n_s}{\prod_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} {m_\chi}^{\chi(1)^2}} = {n_S}^{|S|} \frac{\prod_{s \neq 1} n_s}{\prod_{\chi \neq 1_S} m^{\chi(1)^2}} \in \mathbb{Z}$$

であるが $n_S 1$ は m と素だから

$$\frac{\prod_{s \neq 1} n_s}{\prod_{\chi \neq 1_S} m^{\chi(1)^2}} = \frac{\prod_{s \neq 1} n_s}{m^{|S|-1}} \in \mathbb{Z}$$

となる。特に $\prod_{s \neq 1} n_s \geq m^{|S|-1}$ である。相加平均、相乗平均の関係から

$$\left(\prod_{s \neq 1} n_s \right)^{\frac{1}{|S|-1}} \leq \frac{\sum_{s \neq 1} n_s}{|S| - 1} \leq \frac{\sum_{s \neq 1} n_s}{\sum_{\chi \neq 1_S} \chi(1)} = \frac{n_S - 1}{\sum_{\chi \neq 1_S} \chi(1)} = m$$

である。よって $\prod_{s \neq 1} n_s \leq m^{|S|-1}$ となる。以上より $\prod_{s \neq 1} n_s = m^{|S|-1}$ であり、特に $\sum_{\chi \neq 1_S} \chi(1) = |S| - 1$ より S は可換であり、また $n_s = m$ が任意の $s \neq 1$ について成り立つ。 □

以上の補題を併せて以下の結果を得る。

定理 5.37 ([19, Theorem 3.3])**.** (X, S) を $n_S = p$ なるアソシエーション・スキームとする。このとき (X, S) は可換である。更に (X, S) の自明でない関係の分岐指数と自明でない既約指標の重複度はすべて一定の値となる。また自明でない既約指標はすべて代数的に共役である。

素数位数アソシエーション・スキームの指標表は決定されていないが、その分解体が円分体にとれるという仮定の下では指標表が決定される。以下でこれを示す。

$|S| = d+1$, $k = (p-1)/d$ とおく。S の自明でない関係の分岐指数、自明でない既約指標の重複度はいずれも k である。したがってフレーム数は $\mathcal{F}(S) = p^{d+1}$ である。

$\mathbb{Q}S$ の環としての直和分解を考えると、自明でない指標がすべて代数共役であることと、その可換性から

$$\mathbb{Q}S \cong \mathbb{Q} \oplus K$$

となる。ここで K は d 次代数体である。よって K の $\mathbb{C}$ への埋め込みが存在する。これを一つ固定する。$\mathbb{Q}S$ から K への射影を、更に $\mathbb{C}$ に埋め込めば、これは代数準同型となり、S の自明でない既約指標となる。この既約指標を χ とする。任意の $s \in S$ について $\chi(\sigma_s) \in K$ である。更に次が成り立つ。

補題 5.38. $\{\chi(\sigma_s) \mid 1 \neq s \in S\}$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立である。よって $\chi(\mathbb{Q}S) = K$ が成り立つ。

Proof. S は可換である。その指標表は行列と見ると正則で、直交関係によってその行列式は

$$0 \neq \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & A & \\ 1 & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

である。よって A の部分も正則行列となる。A の第一行が $\{\chi(\sigma_s) \mid 1 \neq s \in S\}$ を並べたものであり、これが一次従属であるならば、自明でない既約指標が代数共役であることにより A の列ベクトルが一次従属になってしまう。よって $\{\chi(\sigma_s) \mid 1 \neq s \in S\}$ は一次独立である。 □

$\mathcal{O}_K$ で K の整数環を表すものとする。直和分解 $\mathbb{Q}S \cong \mathbb{Q} \oplus K$ について $\mathbb{Z}S$ は $\mathbb{Z} \oplus \mathcal{O}_K$ に埋め込まれる。$\mathbb{Z} \oplus \mathcal{O}_K$ を $\mathbb{Z}$-代数と見て、その正則表現の判別式を考えれば、それは K の判別式に等しい。一方で定理 5.18 より $\mathbb{Z}S$ の判別式は $\mathcal{F}(S) = p^{d+1}$ である。よって K の判別式は p のべきである。

ここで K がアーベル体であると仮定する。このとき K はある円分体に含まれ [34, Theorem 6.18]、その導手は p-べきである [34, Proposition 8.1]。ここで K の $\mathbb{Q}$ 上の次元 d は $p-1$ の約数であるから、K は p-分体 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ の d 次の部分体として一意的に定まる。ただし ζ_p は 1 の原始 p-乗根の一つとする。

$\alpha = \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/K}(\zeta_p)$ とし τ を巡回群 $Gal(K/\mathbb{Q})$ の生成元とする。このとき $\{\alpha^{\tau^i} \mid i = 0, 1, \cdots, d-1\}$ は $\mathcal{O}_K$ の整数基となる。

ここでサイクロトミック・スキーム $Cyc(p, d)$ (例 1.14) の指標表を証明なしに記す。

補題 5.39. サイクロトミック・スキーム $Cyc(p, d)$ の指標表は以下の通りである。

1	1	k	k	$\cdots$	k	1
φ	1	α	α^{τ}	$\cdots$	$\alpha^{\tau^{d-1}}$	k
φ^{τ}	1	α^{τ}	α^{τ^2}	$\cdots$	α	k
$\vdots$		$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		$\vdots$
$\varphi^{\tau^{d-1}}$	1	$\alpha^{\tau^{d-1}}$	α	$\cdots$	$\alpha^{\tau^{d-2}}$	k

問 5.40. 補題 5.39 を確認せよ。

$Cyc(p, d)$ の指標の直交関係により、以下が成り立つ。

補題 5.41. 上記の記号の下で $\sum_{i=0}^{d-1} \alpha^{\tau^i} = -1$ であり、かつ

$$\sum_{i=0}^{d-1} \alpha^{\tau^i} \overline{\alpha}^{\tau^{i+j}} = \begin{cases} p-k, & \text{if } j \equiv 0 \pmod{d}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。

素数位数スキーム (X, S) の指標表を考えよう。自明でない既約指標がすべて代数共役であることから指標表は

	1	s_1	s_2		s_d	
1_G	1	k	k	$\cdots$	k	1
χ	1	β_1	β_2	$\cdots$	β_d	k
χ^{τ}	1	${\beta_1}^{\tau}$	${\beta_2}^{\tau}$	$\cdots$	${\beta_d}^{\tau}$	k
$\vdots$		$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		$\vdots$
$\chi^{\tau^{d-1}}$	1	${\beta_1}^{\tau^{d-1}}$	${\beta_2}^{\tau^{d-1}}$	$\cdots$	${\beta_d}^{\tau^{d-1}}$	k

と書くことが出来る。s_j を一つ固定して考える。$\{\alpha^{\tau^i} \mid i = 0, 1, \cdots, d-1\}$ が整数基であることと β_j が K の整数であることから

$$\beta_j = \sum_{\ell=0}^{d-1} b_\ell \alpha^{\tau^\ell}$$

となる $b_\ell \in \mathbb{Z}$ が存在する。可換スキームの第二直交関係を 1 と s_j に適用することにより

$$0 = k\left(1+\sum_{i=0}^{d-1}\beta_j^{\tau^i}\right) = k\left(1+\sum_{i=0}^{d-1}\sum_{\ell=0}^{d-1} b_\ell \alpha^{\tau^{i+\ell}}\right) = k\left(1-\sum_{\ell=0}^{d-1} b_\ell\right)$$

である。よって $\sum_{\ell=0}^{d-1} b_\ell = 1$ である。また第二直交関係を s_j とそれ自身に適用して

$$\begin{aligned} pk &= k\left(k+\sum_{i=0}^{d-1}\beta_j^{\tau^i}\overline{\beta_j}^{\tau^i}\right) = k\left(k+\sum_{i=0}^{d-1}\sum_{\ell=0}^{d-1}\sum_{m=0}^{d-1} b_\ell b_m \alpha^{\tau^{i+\ell}}\overline{\alpha}^{\tau^{i+m}}\right) \\ &= k\left(k+(p-k)\sum_{\ell=0}^{d-1} {b_\ell}^2\right) \end{aligned}$$

である。よって $\sum_{\ell=0}^{d-1} {b_\ell}^2 = 1$ となる。以上より、唯一つの ℓ について $b_\ell = 1$ であり、他は 0 となる。

可換スキームの指標表が正則行列であることから、指標表は等しい列をもたない。よって適当に列を並べ替えれば (X,S) の指標表は $Cyc(p,d)$ の指標表に一致する。以下の定理が成り立つ。

定理 5.42 ([19, Theorem 5.3])**.** (X,S) を $n_S = p$, $|S| = d+1$ であるアソシエーション・スキームとする。任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ と任意の $s \in S$ に対して $\chi(\sigma_s)$ がある円分体に含まれると仮定する。このとき (X,S) の指標表は $Cyc(p,d)$ の指標表に等しい。すなわち (X,S) は $Cyc(p,d)$ と代数的に同型である。

未解決問題 5.43. [4, §2.7] で任意の可換スキームの指標の値が円分体に含まれるか、という問題があり、いまだに未解決である。この問題が肯定的に解かれれば、素数位数アソシエーション・スキームの指標表はサイクロトミック・スキームと同じものに限ることになる。

注意. 可換スキームについて、クライン・パラメーターがすべて有理数であるならば、その指標の値は円分体に含まれることが知られている [32]。

未解決問題 5.44. 素数位数のシュアー的でないスキームはクラス 2 のときだけ、その存在が確認されている。クラス 3 以上のシュアー的でない素数位数スキームが存在するかどうかは分かっていない。

未解決問題 5.45. 定理 5.37 によって $n_S = p$ のときには (X, S) は可換である。有限群 G は $|G| = p^2$ のときにも可換である。これを一般化して $n_S = p^2$ のときに (X, S) が可換になるか、という問題が考えられるが、これは未解決である。(X, S) がシュアー的であるならば $n_S = p^2$ であるスキームは可換になることが分かっている。

この問題に対する部分的な結果を以下に示そう。

命題 5.46. (X, S) を $n_S = p^2$ であるアソシエーション・スキームとする。細剰余 $\mathbf{O}^\theta(S)$ が S と異なるならば (X, S) は可換である。特に $n_{\mathbf{O}^\theta(S)} = p$ ならば $|S| = |\mathbf{O}^\theta(S)| + p - 1$ または $|S| = p|\mathbf{O}^\theta(S)|$ である。

Proof. $T = \mathbf{O}^\theta(S)$ とする。$n_T = 1$ または $n_T = p$ である。$n_T = 1$ ならば (X, S) は細スキームであるから、それを有限群と見て可換である。$n_T = p$ と仮定する。T は可換である。このとき $S/\!\!/T$ は位数 p の巡回群であり、定理 4.27 が利用できる。S の任意の既約指標が 1 次であることを示す。また S の既約指標 χ は、T のある既約指標 φ に対して $\chi \in \mathrm{Irr}(S \mid \varphi)$ である。

$\mathrm{Irr}(S \mid 1_T) = \mathrm{Irr}(S/\!\!/T)$ であり、したがって $\mathrm{Irr}(S \mid 1_T)$ に含まれる任意の既約指標は 1 次である。

$1_T \neq \varphi \in \mathrm{Irr}(T)$ とする。もし、ある $\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ があって $\chi_T = \varphi$ となるならば定理 4.27 によって $\mathrm{Irr}(S \mid \varphi)$ に含まれる任意の既約指標は 1 次である。よって φ は S の指標に拡張できないと仮定する。このとき $\chi = \varphi^S$ とおけば $\chi \in \mathrm{Irr}(S \mid \varphi)$, $\chi(1) > 1$ である。χ_T の既約因子はすべて異なり、T の自明でない既約指標は高々 $p-1$ 個なので $\chi(1) < p$ である。また $\chi(1) = |\mathrm{Supp}(\varphi^S)|$ である。よって補題 4.24 により、任意の $s \in S - T$ に対して $\chi(\sigma_s) = 0$ である。系 5.29 によって

$$0 = \chi(\sigma_s) \equiv \chi(1) n_s \pmod p$$

であるから $p \mid n_s$ である。しかし $n_{S/\!\!/T} = 1$ であるから $n_s \leq n_{TsT} = p$ であり、よって $n_s = p$ が任意の $s \in S - T$ に対して成り立つ。このとき $|S| = |T| + p - 1$ である。

一方で T の自明でない既約指標はすべて代数共役であるから上記の状況が T の任意の自明でない既約指標について成り立つ。よって $|S| = \sum_{\eta \in \mathrm{Irr}(S)} \eta(1)^2 = p + (|T| - 1)\chi(1)^2$ である。$|S| = |T| + p - 1$ とあわせれば $\chi(1) = 1$ でなければならず矛盾が生じる。以上より (X, S) は可換である。

これまでの議論で T の自明でない既約指標 φ は常に S に拡張されることが分かった。その拡張の一つを χ とする。$\chi(\sigma_s) \neq 0$ となる $s \in S - T$ が存在すれば、$|\mathrm{Irr}(S \mid \varphi)| = p$ であり、これが任意の既約指標 φ に対して成

り立つので $|S| = p|T|$ となる。$\chi(\sigma_s) \neq 0$ となる $s \in S - T$ が存在しなければ、$|\mathrm{Irr}(S \mid \varphi)| = 1$ であり、これが任意の自明でない既約指標に対して成り立ち、自明な指標については $|\mathrm{Irr}(S \mid 1_T)| = p$ なので $|S| = |T| + p - 1$ となる。 □

5.7 フロベニウス代数と対称代数

アソシエーション・スキームと有限群のモジュラー表現の大きな違いの一つは、群代数が対称代数であるのに対して隣接代数は一般にフロベニウス代数にもならないことである。隣接代数がフロベニウス代数である場合には、群代数と類似のある程度のことが成り立つことが期待される。ここでは隣接代数がフロベニウス代数となるための条件を考える。

まずフロベニウス代数と対称代数の定義を述べる。k を体とし A を有限次元 k-代数とする。A-加群は k-上有限次元であるものだけを考える。V を右 A-加群とする。$\widehat{V} = \mathrm{Hom}_k(V, k)$ とおく。$\widehat{V}$ は

$$(a\mu)(v) = \mu(va), \quad a \in A,\ \mu \in \widehat{V},\ v \in V$$

によって左 A-加群となる。$\widehat{V}$ を V の**双対加群** (dual module) という。同様に V が左 A-加群ならば $\widehat{V}$ は右 A-加群となる。また V が (A, A)-両側加群であるならば

$$(a\mu b)(v) = \mu(bva), \quad a, b \in A,\ \mu \in \widehat{V},\ v \in V$$

で $\widehat{V}$ も (A, A)-両側加群である。A 自身を右 A-加群と見たもの、すなわち正則右 A-加群、を A_A と書く。同様に ${}_AA$, ${}_AA_A$ は A を左 A-加群、(A, A)-両側加群と見たものである。

右 A-加群として $\widehat{{}_AA} \cong A_A$ であるとき A を**フロベニウス代数** (Frobenius algebra) という。また (A, A)-両側加群として $\widehat{{}_AA_A} \cong {}_AA_A$ となるとき A を**対称代数** (symmetric algebra) という。

注意. フロベニウス代数の定義において、左右を逆にして $\widehat{A_A} \cong {}_AA$ という条件を考えることも出来るが、これらは同値である。

k-双線型写像 $\rho : A \times A \to k$ が**結合的** (associative) であるとは $a, b, c \in A$ に対して $\rho(ab, c) = \rho(a, bc)$ が成り立つこととする。ρ が**対称的** (symmetric) であるとは $a, b \in A$ に対して $\rho(a, b) = \rho(b, a)$ が成り立つこととする。また ρ が**非退化** (nondegenerate) であるとは、任意の $x \in A$ に対して $\rho(a, x) = 0$ ならば $a = 0$ であることとする。

$\mu \in \widehat{A}$ が**対称的** (symmetric) であるとは $a, b \in A$ に対して $\mu(ab) = \mu(ba)$ が成り立つこととする。また μ が**正則** (regular) であるとは、任意の $x \in A$ に対して $\mu(ax) = 0$ ならば $a = 0$ であることとする。

結合的な k-双線型写像 $\rho : A \times A \to k$ に対して $\mu(a) = \rho(a, 1)$ で $\mu \in \widehat{A}$ を定める。このとき ρ が非退化ならば μ は正則であり、ρ が対称的ならば μ も対称的である。

また $\mu \in \widehat{A}$ に対して k-双線型写像 $\rho : A \times A \to k$ を $\rho(a, b) = \mu(ab)$ で定めれば ρ は結合的である。更に μ が正則ならば ρ は非退化であり、μ が対称的ならば ρ も対称的である。

定理 5.47 ([33, Theorem 2.8.13])**.** k-代数 A について以下の条件は同値である。

(1) A はフロベニウス代数である。

(2) 非退化かつ結合的な k-双線型写像 $\rho : A \times A \to k$ が存在する。

(3) 正則な $\mu \in \widehat{A}$ が存在する。

定理 5.48 ([33, Theorem 2.8.14])**.** k-代数 A について以下の条件は同値である。

(1) A は対称代数である。

(2) 非退化で対称的かつ結合的な k-双線型写像 $\rho : A \times A \to k$ が存在する。

(3) 正則かつ対称的な $\mu \in \widehat{A}$ が存在する。

アソシエーション・スキーム (X, S) の隣接代数 kS を考える。$s \in S$ に対して $\tau_s \in \widehat{kS}$ を $\tau_s(\sigma_t) = \delta_{st}$ で定めれば $\{\tau_s \mid s \in S\}$ は $\widehat{kS}$ の基底となる。$\widehat{kS}$ への kS の作用は以下のようになる。

補題 5.49. $\tau_s\sigma_t = \sum_{u \in S} p_{tu}^s \tau_u$, $\sigma_t\tau_s = \sum_{u \in S} p_{ut}^s \tau_u$.

Proof. 直接計算によって

$$(\tau_s\sigma_t)(\sigma_u) = \tau_s(\sigma_t\sigma_u) = \sum_{v \in S} p_{tu}^v \tau_s(\sigma_v) = p_{tu}^s$$

となる。同様に $(\sigma_t\tau_s)(\sigma_u) = p_{ut}^s$ となり、結果を得る。 □

$\mu = \sum_{s\in S} a_s\tau_s$ $(a_s \in k)$ とする。μ に対応する双線型写像を ρ とする。このとき

$$\rho(\sigma_s, \sigma_t) = \mu(\sigma_s\sigma_t) = \sum_{u\in S}\sum_{v\in S} a_v p^u_{st}\tau_v(\sigma_u) = \sum_{u\in S} a_u p^u_{st}$$

である。よって ρ を表現する行列は $\left(\sum_{u\in S} a_u p^u_{st}\right)_{st}$ である。μ が正則であることとこの行列が正則行列であることは同値である。また μ が対称的であることとこの行列が対称行列であることは同値である。したがって次が成り立つ。

定理 5.50. 隣接代数 kS がフロベニウス代数であることと $\left(\sum_{u\in S} a_u p^u_{st}\right)_{st}$ が正則となる $a_u \in k$ $(u \in S)$ が存在することは同値である。また kS が対称代数であることと $\left(\sum_{u\in S} a_u p^u_{st}\right)_{st}$ が正則かつ対称となる $a_u \in k$ $(u \in S)$ が存在することは同値である。

例 5.51. G を 5 次交代群 A_5 とし P をそのシロー 2 部分群とする。G と P で定義されるシュアー的スキーム (例 1.5) (X, S) を考える。このとき標数 2 の代数閉体 F 上の隣接代数 FS はフロベニウス代数であるが対称代数ではない。

一般にこの判定条件は使いにくいため、特殊な場合を考える。そのために少し準備をする。p を素数とし F を標数 p の体とする。FS において $\ell \geq 0$ に対して

$$I_\ell = \bigoplus_{p^\ell | n_s} F\sigma_s$$

とおく。ν_p は $\nu_p(p) = 1$ なる $\mathbb{Q}$ の付値である。簡単のため、この節では

$$S_\ell = \{s \in S \mid \nu_p(n_s) = \ell\}$$

とおくことにする。また分岐指数 n_s の p'-部分を n'_s と書くことにする。すなわち $n_s = n'_s p^{\nu_p(n_s)}$ である。

補題 5.52. I_ℓ は FS のイデアルである。

Proof. $n_u p^{u^*}_{st} = n_s p^{s^*}_{tu}$ である。したがって、もし $\nu_p(n_s) \geq \ell$ かつ $\nu_p(n_u) < \ell$ であるならば $\nu_p(p^{u^*}_{st}) > 0$、すなわち $p^{u^*}_{st} \equiv 0 \pmod p$ が成り立つ。 □

補題 5.53. 任意の $\ell \geq 0$ に対して (FS, FS)-両側加群として $\widehat{I_\ell/I_{\ell+1}} \cong I_\ell/I_{\ell+1}$ が成り立つ。

Proof. $s \in S_\ell$ に対して $\overline{\sigma_s} = \sigma_s + I_{\ell+1}$ と書くことにする。$\{\overline{\sigma_s} \mid s \in S_\ell\}$ は $I_\ell/I_{\ell+1}$ の基底である。$s \in S_\ell$ に対して $\overline{\tau_s} \in \widehat{I_\ell/I_{\ell+1}} = \mathrm{Hom}_F(I_\ell/I_{\ell+1}, F)$ を $\overline{\tau_s}(\overline{\sigma_t}) = \delta_{st}$ で定めれば $\{\overline{\tau_s} \mid s \in S_\ell\}$ は $\widehat{I_\ell/I_{\ell+1}}$ の基底である。対応 $\overline{\sigma_s} \mapsto n'_s\overline{\tau_{s^*}}$ が両側加群としての同型を与えることを示す。$\nu_p(n'_s) = 0$ であるからベクトル空間としての同型であることは明らかである。よって FS の作用を見る。

まず、任意の $t \in S$ に対して

$$\overline{\sigma_s}\sigma_t = \sum_{u \in S_\ell} p_{st}^u \overline{\sigma_u}$$

である。また $(n'_s\overline{\tau_{s^*}})\sigma_t = \sum_{u\in S_\ell} a_u(n'_u\overline{\tau_{u^*}})$ とすると

$$\begin{aligned} a_u &= \frac{1}{n'_u}((n'_s\overline{\tau_{s^*}})\sigma_t)(\overline{\sigma_{u^*}}) = \frac{n'_s}{n'_u}\overline{\tau_{s^*}}(\sigma_t\overline{\sigma_{u^*}}) \\ &= \sum_{v\in S_\ell} \frac{n'_s}{n'_u} p_{tu^*}^v \overline{\tau_{s^*}}(\overline{\sigma_v}) = \frac{n'_s}{n'_u} p_{tu^*}^{s^*} = p_{st}^u \end{aligned}$$

となる。左からの作用も同様で、したがって両側加群としての同型を得る。 □

任意の $s \in S$ について $p \nmid n_s$ であるスキームを p'-**分岐スキーム** (p'-valenced scheme) という。明らかに p'-分岐スキームであることはは $I_1 = 0$ であることと同値である。

定理 5.54. FS/I_1 は対称代数である。特に (X, S) が p'-分岐スキームであるならば、その隣接代数 FS は対称代数である。

Proof. 補題 5.53 より (FS, FS)-両側加群として $\widehat{FS/I_1} \cong FS/I_1$ である。これは $(FS/I_1, FS/I_1)$-両側加群としての同型にもなる。 □

定理 5.55. ある正の自然数 ℓ が存在して、任意の $1 \neq s \in S$ に対して $\nu_p(n_s) = \ell$ であるとする。このとき FS は対称代数である。

Proof. 定理の仮定の下で (FS, FS)-両側加群として $FS = F\sigma_S \oplus I_\ell$ である。$F\sigma_S \cong FS/I_1$ なので補題 5.53 より (FS, FS)-両側加群として $F\sigma_S \cong \widehat{F\sigma_S}$ かつ $I_\ell \cong \widehat{I_\ell}$ である。 □

この命題の仮定が $p = 2$ に対して成り立てば隣接代数は半単純になることが [1] で示されている。このとき更に (X, S) は対称スキームになる。しかし $p \neq 2$ の場合にはこの仮定の下でも半単純になるとは限らないし、可換スキームであるとも限らない。

更に特殊な状況を考えよう。

命題 5.56. FS の主ブロック $B_0(S)^*$ がフロベニウス代数かつ局所環であるとする。このとき $\dim_F B_0(S)^* \leq |S_0|$ が成り立つ。

Proof. $B_0(S)^*$ は局所環なので、唯一つの極大イデアルをもつ。また $B_0(S)^*$ はフロベニウス代数なので唯一つの極小イデアルをもつ。$F\sigma_S$ は主ブロックに属する 1 次元のイデアルなので、これが極小イデアルである。明らかに $F\sigma_S \cap I_1 = 0$ なので、埋め込み $B_0(S)^* \to FS$ は単射 $B_0(S)^* \to FS/I_1$ を引き起こす。$\dim_F FS/I_1 = |S_0|$ なので $\dim_F B_0(S)^* \leq |S_0|$ となる。 □

系 5.57. FS が局所環であるとする。このとき以下の条件は同値である。

(1) S は p'-分岐スキームである。

(2) FS はフロベニウス代数である。

(3) FS は対称代数である。

Proof. 定理 5.54 より (1) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (2) は明らかである。(3) と仮定する。このとき命題 5.56 が適用できて $|S| = \dim_F FS = \dim_F B_0(S)^* \leq |S_0|$ となるから $S = S_0$、すなわち (X, S) は p'-分岐スキームである。 □

一般に FS がいつ局所環になるかは分かっていないが、系 5.29 により n_S が p-べきならば FS は局所環となり、系 5.57 が適用できる。

例 5.58. G を有限群、H をその部分群で $|G : H|$ が p-べきであるものとする。このとき G, H から定義されるシュアー的スキーム (X, S) の隣接代数 FS は、(X, S) の位数が p-べきであるから局所環である。(X, S) の分岐指数は $|H : H \cap H^g|$ $(g \in G)$ で与えられる。よってこの仮定の下で FS が対称代数 (フロベニウス代数) となるための必要十分条件は、任意の $g \in G$ に対して $|H : H \cap H^g|$ が p で割り切れないことである。

例 5.59. G を有限群とし、(X, S) を G の群アソシエーション・スキームとする。隣接代数 FS が局所環となるための必要十分条件は、群代数 FG の p-ブロックが主ブロックのみであることである。例えば、ある正規 p-部分群 Q が存在して $C_G(Q)$ が p-群となるならば FG のブロックは主ブロックのみである [33, Exercise 5.2.10]。よってこのとき隣接代数は局所環となる。この仮定の下で、いつ FS が対称代数となるかを決定する。

(X, S) の分岐指数は G の共役類の元数で $|G : C_G(g)|$ $(g \in G)$ である。もし $g \in G$ が p-元でないとすると $g \notin C_G(Q)$ であるから $|G : C_G(g)|$ は p-で割り切れる。よってこのとき FS は対称代数ではない。G を非アーベル p-群とすると、やはり長さが p で割り切れる共役類が存在する。したがって

FS が対称代数となるためには G はアーベル p-群でなければならない。逆に G がアーベル p-群であるとき $FS \cong FG$ であるから隣接代数は対称代数である。

特に p-群の群アソシエーション・スキームの隣接代数が対称代数となるには、その群がアーベル群であることが必要十分である。

例 5.60. ハミング・スキーム $H(n, q)$ の標数 p の体 F 上の隣接代数が対称代数となるための必要十分条件は次のいずれかが成り立つことである。

(1) $p \nmid q$ である。(このとき隣接代数は半単純である。)

(2) $p \mid q$ であり、$n = ap^{\ell} - 1,\ 1 \leq a < p$ である。(このとき隣接代数は $H(n, p)$ の隣接代数と同型である。特にこれは局所環であり系 5.57 が適用できる。)

(ハミング・スキームの隣接代数の構造は [40] で完全に決定されている。)

注意. 隣接代数がフロベニウス代数であるときには双対基底を用いて直交関係が成り立つ。これについては、例えば [15] を参照して欲しい。

Chapter 6

アソシエーション・スキームの圏

ここでは表現論からは外れるが、アソシエーション・スキームの圏を定義し、その基本的な性質を調べる。アソシエーション・スキームは有限群の拡張であり、(有限) 群の圏があまり扱いやすい圏ではないので、アソシエーション・スキームの圏もそれほど良い性質をもつとは期待できない。しかしその研究が意味のないものであるとは思わない。

　筆者も圏論については詳しいわけではないので、圏論における基本的な定義なども記述する。圏についての一般論については [30] を参照して欲しい。

6.1　アソシエーション・スキームの圏の定義

圏 (category) $\mathcal{C}$ は次の構成要素をもつ。

(1) $\mathcal{C}$ の**対象** (object) と呼ばれるものの領域 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

(2) $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、**射** (morphism) と呼ばれるものの集合 $[M, N]_{\mathcal{C}}$.

(3) $L, M, N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、**合成** (composition) と呼ばれる写像 $[L, M]_{\mathcal{C}} \times [M, N]_{\mathcal{C}} \to [L, N]_{\mathcal{C}}$.

$f \in [L, M]_{\mathcal{C}}$ と $g \in [M, N]_{\mathcal{C}}$ に対して、合成による像を $g \circ f$ または gf と表す。$\mathcal{C}$ が圏であるためには、以下の条件が成り立つこととする。

(i) $(M, N) \neq (M', N')$ のとき $[M, N]_{\mathcal{C}} \cap [M', N']_{\mathcal{C}} = \phi$ が成り立つ。

(ii) 任意の $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、$I_M \in [M, M]_{\mathcal{C}}$ が存在して、任意の $f \in [L, M]_{\mathcal{C}}$ と $g \in [M, N]_{\mathcal{C}}$ に対して $I_M f = f$, $g I_M = g$ となる。

(iii) $f \in [L, M]_{\mathcal{C}}$, $g \in [M, N]_{\mathcal{C}}$, $h \in [N, P]_{\mathcal{C}}$ に対して $(hg)f = h(gf)$ が成り立つ。

どの圏で考えているかが明らかであるときには、射 $f \in [M, N]_{\mathcal{C}}$ を $f : M \to N$ とも書くことにする。

例 6.1 (集合の圏 $\mathcal{S}$). 集合すべてを対象とし、射として写像を考えれば圏が定義される。これを**集合の圏** (category of sets) といい $\mathcal{S}$ と表す。

例 6.2 (基点つきの集合の圏 $\mathcal{S}$). 空でない集合 X とその一要素 x の組 $(X; x)$ を対象とし、$(X; x)$ から $(Y; y)$ への射としては、写像 $f : X \to Y$ で $f(x) = y$ なるもの、を考えれば、圏が定義される。これを**基点つきの集合の圏** (category of sets with base point) といい $\mathcal{S}_0$ と表す。

(X, S) をアソシエーション・スキームとする。$x, x' \in X$ に対して $(x, x') \in s$ となる $s \in S$ が唯一つ存在する。これを $r(x, x')$ と書くことにする。すなわち r は $X \times X$ から S への写像である。

(X, S) をアソシエーション・スキームとし $x_0 \in X$ を固定する。このとき $(X, S; x_0)$ を**基点つきのアソシエーション・スキーム** (association scheme with base point) という。この章では基点つきのアソシエーション・スキームのみを考えるため、これを単にアソシエーション・スキームということにする。

基点つきのアソシエーション・スキームの圏 (category of association schemes with base point) $\mathcal{AS}_0$ を定義する。$\mathcal{AS}_0$ の対象は基点つきのアソシエーション・スキームである。射 $f : (X, S; x_0) \to (Y, T; y_0)$ は、写像 $f : X \cup S \to Y \cup T$ であって、以下の条件を満たすものである。

(1) $f(X) \subset Y$.

(2) $f(S) \subset T$.

(3) $x, x' \in X$ に対して $f(r(x, x')) = r(f(x), f(x'))$ が成り立つ。

(4) $f(x_0) = y_0$.

これが圏の条件を満たすことはすぐに分かる。

注意. 対象として基点を考えないアソシエーション・スキームをとり、条件 (4) を外しても圏が定義される。これを**アソシエーション・スキームの圏** (category of association schemes) といい $\mathcal{AS}$ と書く。この圏を考えることも意味があると思うが、ここに述べる議論よりも複雑な議論が必要になる。

$\mathcal{AS}_0$ に関係する基本的な関手を考える。

$\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ を一般の圏とする。$M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に $T(M) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ を対応させ、$f \in [M, N]_{\mathcal{C}}$ に $T(f) \in [T(M), T(N)]_{\mathcal{C}'}$ を対応させる T で以下の条件を満たすものを**共変関手** (covariant functor) という。

(1) 射 f, g について $T(gf) = T(g)T(f)$ が成り立つ。

(2) 任意の $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について $T(I_M) = I_{T(M)}$ が成り立つ。

(1) の条件を $T(gf) = T(f)T(g)$ で置き換えたものを**反変関手** (contravariant functor) という。

共変関手 $P : \mathcal{AS}_0 \to \mathcal{S}_0$ と $R : \mathcal{AS}_0 \to \mathcal{S}$ を以下のように定める。$(X, S; x_0) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{AS}_0)$ に対して、$P(X, S; x_0) = (X; x_0)$, $R(X, S; x_0) = S$ とする。また、射 $f : (X, S; x_0) \to (Y, T; y_0)$ に対して $P(f)$, $R(f)$ は単なる写像の制限とする。この二つの関手は基本的ではあるが、以下の議論では重要である。

6.2 射

$\mathcal{C}$ を一般の圏とする。$f \in [M, N]_{\mathcal{C}}$ が**単型** (monomorphism) であるとは、「$g, h \in [L, M]_{\mathcal{C}}$ に対して $fg = fh$ ならば $g = h$」が成り立つこととする。$f \in [M, N]_{\mathcal{C}}$ が**全型** (epimorphism) であるとは、「$g, h \in [M, N]_{\mathcal{C}}$ に対して $gf = hf$ ならば $g = h$」が成り立つこととする。単型かつ全型であるものを**双型** (bimorphism) という。

例 6.3. 集合の圏 $\mathcal{S}$ においては単型は単射、全型は全射、双型は全単射である。

問 6.4. $f : L \to M$, $g : M \to N$ に対して以下を示せ。

(1) f, g が共に単型ならば gf も単型である。

(2) f, g が共に全型ならば gf も全型である。

(3) gf が単型ならば f は単型である。

(4) gf が全型ならば g は全型である。

(5) 任意の対象 M に対して I_M は双型である。

$f : M \to N$ が**セクション** (section) であるとは、$g : N \to M$ で $gf = I_M$ なるものが存在することをいう。$f : M \to N$ が**リトラクション** (retraction) であるとは、$g : N \to M$ で $gf = I_N$ なるものが存在することをいう。$f : M \to N$ が**同型** (isomorphism) であるとは、$g : N \to M$ で $gf = I_M$ かつ $fg = I_N$ なるものが存在することをいう。セクションは単型、リトラクションは全型、同型は双型である。

対象 M と N に対して、同型 $f : M \to N$ が存在するとき、M と N は同型であるという。同型であるという関係は $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の同値関係である。

$M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が $\mathcal{C}$ の**始対象** (initial object) であるとは、任意の $N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $[M, N]_{\mathcal{C}}$ が唯一つの要素のみからなることをいう。逆に $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が $\mathcal{C}$ の**終対象** (terminal object) であるとは、任意の $N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $[N, M]_{\mathcal{C}}$ が唯一つの要素のみからなることをいう。始対象、終対象は存在すれば同型を除いて一意的に決まる。始対象、かつ終対象であるものを**零対象** (zero object) という。零対象は通常 0 と書かれる。零対象を通る射を**零射** (zero morphism) といい、これも 0 と書く。射 $f : M \to N$ が零対象を通るとは、(一意的に存在する) $g : M \to 0$ と $h : 0 \to N$ に対して $f = hg$ となることである。$\mathcal{C}$ が零対象をもてば、零射は任意の二つの対象の間に存在する。

例 6.5. 集合の圏 $\mathcal{S}$ において、空集合は始対象であり、一つの要素のみをもつ集合が終対象である。したがって $\mathcal{S}$ には零対象は存在しない。基点つきの集合の圏 $\mathcal{S}_0$ においては一つの要素のみをもつ集合が零対象である。

関手 $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ が**忠実** (faithful) であるとは、「$f, f' \in [M, N]_{\mathcal{C}}$ に対して $T(f) = T(f')$ ならば $f = f'$」が成り立つことをいう。

命題 6.6. 関手 $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ が忠実であるとする。$f \in [M, N]_{\mathcal{C}}$ に対して次が成り立つ。

(1) $T(f)$ が単型ならば f は単型である。

(2) $T(f)$ が全型ならば f は全型である。

Proof. $T(f)$ は単型であるとし $fg = fh$ と仮定する。このとき $T(f)T(g) = T(f)T(h)$ で $T(f)$ が単型なので $T(g) = T(h)$ である。T は忠実なので $g = h$ となり、f は単型である。

全型についても同様である。 □

アソシエーション・スキームの圏 $\mathcal{AS}_0$ を考えよう。特に f, $P(f)$, $R(f)$ がそれぞれ単型、全型、双型であることについて調べる。

定義により位数 1 のアソシエーション・スキーム $(\{x\}, \{1\}; x)$ は $\mathcal{AS}_0$ の零対象である。$f \in [(X, S; x_0), (Y, T; y_0)]_{\mathcal{AS}_0}$ に対して $f = 0$ であることは、

任意の $x \in X$ に対して $f(x) = y_0$ であることと同値である。またこのとき、任意の $s \in S$ に対して $f(s) = 1$ である。

注意. $\mathcal{AS}$ には零対象は存在しない。$\mathcal{AS}_0$ を考えるのはこのためである。

補題 6.7. 関手 $P : \mathcal{AS}_0 \to \mathcal{S}_0$ は忠実である。特に $P(f)$ が単型ならば f は単型、$P(f)$ が全型ならば f は全型である。

Proof. $f, f' \in [(X, S; x_0), (Y, T; y_0)]_{\mathcal{AS}_0}$ とし $P(f) = P(f')$ と仮定する。$s \in S$ に対して $r(x, x') = s$ となる $x, x' \in X$ が存在する。このとき

$$f(s) = f(r(x, x')) = r(f(x), f(x')) = r(f'(x), f'(x')) = f'(r(x, x')) = f'(s)$$

となり、これは $f = f'$ を意味する。後半は命題 6.6 より分かる。 □

補題 6.8. $(X, S; x_0), (Y, T; y_0) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{AS}_0)$ とする。$g \in [(X; x_0), (Y; y_0)]_{\mathcal{S}_0}$ に対して以下の条件は同値である。

(1) $P(f) = g$ となる $f \in [(X, S; x_0), (Y, T; y_0)]_{\mathcal{AS}_0}$ が存在する。

(2) $r(x_1, x_2) = r(x_3, x_4)$ を満たす任意の $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$ に対して、$r(g(x_1), g(x_2)) = r(g(x_3), g(x_4))$ が成り立つ。

この条件が成り立つとき (1) のような f は g によって一意的に定まる。

Proof. (1) を仮定すれば $f(x) = g(x)$ であるから (2) は射の定義より成り立つ。

(2) を仮定する。$g' : S \to T$ を以下のように定める。$s \in S$ に対して $r(x, x') = s$ となる $x, x' \in X$ が存在する。これに対して $g'(s) = r(g(x), g(x'))$ とする。(2) は g' が矛盾なく定義できることを保証する。このとき、g と g' は $\mathcal{AS}_0$ の射 f を定め、明らかに $P(f) = g$ を満たす。f の一意性は補題 6.7 より明らかである。 □

次の補題は補題 6.8 により明らかである。

補題 6.9. クラス 1 のアソシエーション・スキーム $(X, \{1, X \times X - 1\}; x_0)$ と任意のアソシエーション・スキーム $(Y, T; y_0)$ を考える。このとき、$\mathcal{S}_0$ の任意の単型 $g : (Y; y_0) \to (X; x_0)$ に対して、$P(f) = g$ となる単型 $f : (Y, T; y_0) \to (X, \{1, X \times X - 1\}; x_0)$ が存在する。

補題 6.10. クラス 1 のアソシエーション・スキーム $(X, \{1, X \times X - 1\}; x_0)$ と任意のアソシエーション・スキーム $(Y, T; y_0)$ を考える。射 $f : (X, \{1, X \times X - 1\}; x_0) \to (Y, T; y_0)$ に対して $P(f)$ が単型でなければ $f = 0$ である。特に $|X| > |Y|$ ならば $[(X, \{1, X \times X - 1\}; x_0), (Y, T; y_0)]_{\mathcal{AS}_0}$ は零射のみからなる。

Proof. $P(f)$ が単型でないとする。このとき、ある $x, x' \in X$ で $x \neq x'$ かつ $f(x) = f(x')$ なるものが存在する。$f(X \times X - 1) = f(r(x, x')) = r(f(x), f(x')) = 1$ であるから、$f = 0$ である。 □

補題 6.11. $f \in [(X, S; x), (Y, T; y)]_{\mathcal{AS}_0}$ に対して「$f(s) = 1$ ならば $s = 1$」が成り立つならば $P(f)$ は単型である。特に $R(f)$ が単型ならば $P(f)$ と f は単型である。

Proof. $x, x' \in X$ に対して $f(x) = f(x')$ と仮定する。このとき $f(r(x, x')) = r(f(x), f(x')) = f(1) = 1$ なので仮定により $r(x, x') = 1$、すなわち $x = x'$ である。よって $P(f)$ は単型であり、補題 6.7 によって f も単型である。 □

注意. 一般に f が単型であっても $R(f)$ が単型とは限らない。

クラス 1 のアソシエーション・スキーム $(X, \{1, X \times X - 1\}; x_0)$ と $|Y| \leq |X|$ である任意のアソシエーション・スキーム $(Y, T; y_0)$ を考える。このとき $\mathcal{S}_0$ における任意の単型 $g : (Y; y_0) \to (X; x_0)$ は $\mathcal{AS}_0$ の単型 $f : (Y, T; y_0) \to (X, \{1, X \times X - 1\}; x_0)$ を引き起こす。$|T| > 2$ であれば、$R(f)$ は単型ではない。

補題 6.12. $f \in [(X, S; x), (Y, T; y)]_{\mathcal{AS}_0}$ に対して、$P(f)$ が全型ならば $R(f)$ も全型である。

Proof. $P(f)$ が全型であるとする。$t \in T$ に対して $r(y, y') = t$ となる $y, y' \in Y$ が存在する。また $P(f)$ が全型なので $f(x) = y$, $f(x') = y'$ となる $x, x' \in X$ が存在する。このとき $f(r(x, x')) = r(f(x), f(x')) = r(y, y') = t$ となり $R(f)$ は全型である。 □

注意. 一般に $R(f)$ が全型であっても $P(f)$ が全型とは限らない。

クラス 1 のアソシエーション・スキーム $(X, \{1, X \times X - 1\}; x_0)$ と $(Y, \{Y \times Y - 1\}; y_0)$ を考え $2 \leq |X| < |Y|$ とする。単型 $g : (X; x_0) \to (Y; y_0)$ に対して、単型 $f : (X, \{1, X \times X - 1\}; x_0) \to (Y, \{Y \times Y - 1\}; y_0)$ が定義される。この f について $R(f)$ は全型であるが $P(f)$ は全型ではない。

補題 6.13. $\mathcal{AS}_0$ の射 f が全型であれば $P(f)$ も全型である。

Proof. $f : (X,S;x_0) \to (Y,T;y_0)$ とし、$P(f)$ が全型でないとする。ある $y_1 \in Y - f(X)$ が存在する。z を Y に含まれない形式的な元とし $Z = Y \cup \{z\}$ とおく。更にクラス 1 のスキーム $(Z,\{1, Z\times Z - 1\};y_0)$ を考える。$g_1 : (Y,T;y_0) \to (Z,\{1,Z\times Z-1\};y_0)$ を任意の $y \in Y$ に対して $g_1(y) = y$ で定める。また $g_2 : (Y,T;y_0) \to (Z,\{1,Z\times Z-1\};y_0)$ を $y \in Y - \{y_1\}$ に対して $g_2(y) = y$, $g_2(y_1) = z$ で定める。このとき $g_1 \neq g_2$ であるが $g_1 f = g_2 f$ となるので f は全型ではない。 □

補題 6.7、補題 6.11、補題 6.12、補題 6.13 によって

$$\begin{array}{ccccc} R(f): \text{単型} & \Longrightarrow & P(f): \text{単型} & \Longrightarrow & f: \text{単型} \\ R(f): \text{全型} & \Longleftarrow & P(f): \text{全型} & \Longleftrightarrow & f: \text{全型} \end{array}$$

なる関係が得られた。実は f が単型であることと $P(f)$ が単型であることは同値になる。これは次の節で示す。

6.3 部分スキームと商スキーム

(X,S) をアソシエーション・スキームとし T をその閉部分集合とする。(X,S) に基点 $x_0 \in X$ を定め、部分スキーム $(X,S)_{x_0T}$ を考える。このアソシエーション・スキームの点集合は x_0T であり、関係の集合は

$$\begin{aligned} & \{s \cap (x_0T \times x_0T) \mid s \in S, s \cap (x_0T \times x_0T) \neq \phi\} \\ = \; & \{t \cap (x_0T \times x_0T) \mid t \in T\} \end{aligned}$$

である。$Y = x_0T$, $U = \{t \cap (x_0T \times x_0T) \mid t \in T\}$ とおき、部分スキームを $(Y,U;x_0)$ と書く。Y から X への自然な埋め込みと U から S への自然な写像は射 $(Y,U;x_0) \to (X,S;x_0)$ を定める。この射を**部分スキーム** (subscheme) という。部分スキーム ι は単型であり、$P(\iota)$, $R(\iota)$ も単型である。

商スキーム $(X,S)^T$ の点集合は $X/T = \{xT \mid x \in X\}$ であり、関係の集合は $S/\!\!/T = \{s^T \mid s \in S\}$ である。このときも X から X/T への自然な写像と S から $S/\!\!/T$ への自然な写像は射 $(X,S;x_0) \to (X/T, S/\!\!/T; x_0T)$ を定める。この射を**商スキーム** (quotient scheme) という。商スキーム π は全型であり、$P(\pi)$, $R(\pi)$ も全型である。

一般の圏 $\mathcal{C}$ において、単型の同値、全型の同値を定義する。$N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と二つの単型 $f : L \to N$, $g \in M \to N$ に対して、射 $h : L \to M$, $\ell : M \to L$ が存在して $f\ell = g$, $gh = f$ となるとき、f と g は同値であるという。この

とき h と ℓ は同型である。

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, shift left, "h"] \arrow[dr, "f"] & \\ M \arrow[u, shift left, "\ell"] \arrow[r, "g"'] & N \end{tikzcd}$$

$N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と二つの全型 $f : N \to L$, $g : N \to M$ に対して、射 $h : L \to M$, $\ell : M \to L$ が存在して $\ell f = g$, $hg = f$ となるとき、f と g は同値であるという。このとき h と ℓ は同型である。

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, shift left, "h"] \\ N \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g"'] & M \arrow[u, shift left, "\ell"] \end{tikzcd}$$

単型の同値類を**部分対象** (subobject) といい、全型の同値類を**商対象** (quotient object) という。しかし、簡単のため、その代表を部分対象、商対象ともいうことにする。部分スキーム、商スキームは正確には部分対象、商対象の特別なものとして定義されるものである。

$(X, S; x_0)$ を基点つきのアソシエーション・スキームとする。$A \subset X$ に対して $\{r(a, a') \mid a, a' \in A \cup \{x_0\}\}$ で生成される閉部分集合を T とする。このとき、T で定まる部分スキームを A **で生成される部分スキーム** (subscheme generated by A) という。また T による商スキームを A **による商スキーム** (quotient scheme by A) という。

一般に $A, B \subset X$ に対して $\{r(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ を $r(A, B)$ と書くことにする。以下の補題は定義より明らかである。

補題 6.14. $x_0 \in A \subset X$ に対して $r(A, A)$ が閉部分集合になることと $r(A, A) \cap r(A, X - A) = \phi$ となることは同値である。

命題 6.15. $x_0 \in A \subset X$ とし $\iota : (Z, U; z_0) \to (X, S; x_0)$ を A で生成される部分スキームとする。このとき次が成り立つ。

(1) 射 $f : (X, S; x_0) \to (Y, T; y_0)$ について、$f(a) = y_0$ が任意の $a \in A$ について成り立つならば $f\iota = 0$ である。

(2) 射 $g : (Y, T; y_0) \to (X, S; x_0)$ について $g(Y) \subset A$ ならば、$g = \iota h$ となる $h : (Y, T; y_0) \to (Z, U; z_0)$ が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd} (Z, U; z_0) \arrow[r, "\iota"] & (X, S; x_0) \\ (Y, T; y_0) \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Proof. (1) $a, a' \in A$ に対して $f(r(a,a')) = r(f(a), f(a')) = r(y_0, y_0) = 1$ である。定義により $\iota(U) = \langle r(A,A) \rangle$ であるから $f\iota(U) = \{1\}$ である。任意の $z \in Z$ に対して $f\iota(r(z, z_0)) = 1$ なので $f\iota(z) = y_0$ となる。

(2) $g(Y) \subset A$ で ι が A で生成される部分スキームなので、$h' : (Y; y_0) \to (Z; z_0)$ で $P(g) = P(\iota)h'$ を満たすものは一意的に存在する。$y_1, y_2, y_3, y_4 \in Y$ に対して $r(y_1, y_2) = r(y_3, y_4)$ と仮定する。このとき

$$
\begin{aligned}
\iota(r(h'(y_1), h'(y_2))) &= r(\iota h'(y_1), \iota h'(y_2)) = r(g(y_1), g(y_2)) \\
&= g(r(y_1, y_2)) = g(r(y_3, y_4)) = r(g(y_3), g(y_4)) \\
&= r(\iota h'(y_3), \iota h'(y_3)) = \iota(r(h'(y_3), h'(y_4)))
\end{aligned}
$$

が成り立つ。$R(\iota)$ も単型なので $r(h'(y_1), h'(y_2)) = r(h'(y_3), h'(y_4))$ である。補題 6.8 により $g = \iota h$ となる $h : (Y, T; y_0) \to (Z, U; z_0)$ が存在する。また h' が一意的であることと P が忠実であることにより h は一意的である。 □

命題 6.16. $x_0 \in A \subset X$ とし $\pi : (X, S; x_0) \to (Y, T; y_0)$ を A による商スキームとする。このとき次が成り立つ。

(1) 射 $f : (Z, U; z_0) \to (X, S; x_0)$ について、$f(Z) \subset A$ ならば $\pi f = 0$ である。

(2) 射 $g : (X, S; x_0) \to (Z, U; z_0)$ について、任意の $a \in A$ に対して $g(a) = z_0$ が成り立つならば、$g = h\pi$ となる $h : (Y, T; y_0) \to (Z, U; z_0)$ が一意的に存在する。

$$
\begin{tikzcd}
(X, S; x_0) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "g"'] & (Y, T; y_0) \arrow[d, dashed, "h"'] \\
& (Z, U; z_0)
\end{tikzcd}
$$

Proof. (1) $f(Z) \subset A$ なので、商スキームの定義から $\pi f(Z) \subset \pi(A) \subset \{y_0\}$ である。

(2) 任意の $a \in A$ に対して $g(a) = z_0$ であるから、任意の $s \in \langle r(A,A) \rangle$ に対して $g(s) = 1$ である。したがって、任意の $x \in X$ に対して g は $x\langle r(A,A) \rangle$ 上で一定の値をとる。よって $h' : (Y; y_0) \to (Z; z_0)$ で $P(g) = h'P(\pi)$ なるものが一意的に存在する。$y_1, y_2, y_3, y_4 \in Y$ に対して $r(y_1, y_2) = r(y_3, r_4)$ と仮定する。$x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$ で $\pi(x_i) = y_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ なるものをとる。$r(x_1, x_2) = s$ とすると $r(x_3, x_4) \in \langle r(A,A) \rangle s \langle r(A,A) \rangle$ なので、$x'_3, x'_4 \in X$ で $\pi(x'_3) = y_3$, $\pi(x'_4) = y_4$, $r(x'_3, x'_4) = r(x_1, x_2)$ となるものが存在する。これを

改めて x_3, x_4 とする。このとき

$$\begin{aligned} r(h'(y_1), h'(y_2)) &= r(h'\pi(x_1), h'\pi(x_2)) = r(g(x_1), g(x_2)) \\ &= g(r(x_1, x_2)) = g(r(x_3, x_4)) = r(g(x_3), g(x_4)) \\ &= r(h'\pi(x_3), h'\pi(x_4)) = r(h'(y_3), h'(y_4)) \end{aligned}$$

である。補題 6.8 により $g = h\pi$ となる $h : (Y, T; y_0) \to (Z, U; z_0)$ が存在する。また h' が一意的であることと P が忠実であることにより h は一意的である。 □

補題 6.17. $f : (X, S; x_0) \to (Y, T; y_0)$ とする。任意の $y, y' \in f(X)$ に対して $|f^{-1}(y)| = |f^{-1}(y')|$ が成り立つ。特に $|X| = \sharp\{x \in X \mid f(x) = y_0\}|f(X)|$ である。

Proof. $x, x' \in X$ に対して $f(x) = f(x')$ であることと $f(r(x, x')) = 1$ であることは同値である。したがって $x \in X$ に対して

$$\sharp\{x' \in X \mid f(x) = f(x')\} = \sum_{s \in f^{-1}(1)} n_s$$

であり、この値は $x \in X$ に依存しない。 □

ここで前節の残りの問題を示そう。

補題 6.18. $\mathcal{AS}_0$ の射 f が単型であれば $P(f)$ も単型である。

Proof. $f : (X, S; x_0) \to (Y, T; y_0)$ とし、$P(f)$ が単型でないとする。ある $y \in Y$ に対して $|f^{-1}(y)| > 1$ であるから、補題 6.17 より、$|f^{-1}(y_0)| > 1$ である。よって、ある $x \in X$ があって $x \neq x_0$ かつ $f(x) = f(x_0) = y_0$ となる。$\iota : (Z, U; z_0) \to (X, S; x_0)$ を $\{x_0, x\}$ で生成される $(X, S; x_0)$ の部分スキームとする。また $g : (Z, U; z_0) \to (X, S; x_0)$ を零射とする。このとき $\iota \neq g$ であるが $f\iota = 0 = fg$ となり、f は単型ではない。 □

前節の結果とこの命題をあわせて以下の結果を得る。

定理 6.19. $\mathcal{AS}_0$ の射 f について、以下の関係が成り立つ。

$$\begin{array}{ccccc} R(f): \text{単型} & \Longrightarrow & P(f): \text{単型} & \Longleftrightarrow & f: \text{単型} \\ R(f): \text{全型} & \Longleftarrow & P(f): \text{全型} & \Longleftrightarrow & f: \text{全型} \end{array}$$

$\mathcal{AS}_0$ における射 f が双射であることは $P(f)$ が全単射であることと同値になる。$\mathcal{AS}_0$ における双射を**融合スキーム** (fusion scheme) という。

6.4 核と余核

$\mathcal{C}$ を一般の圏とする。$f, f' \in [M, N]_{\mathcal{C}}$ に対して、$g \in [L, M]_{\mathcal{C}}$ が

- $fg = f'g$.
- 射 $g' \in [L', M]_{\mathcal{C}}$ が $fg' = f'g'$ を満たすとき、$g' = gh$ となる $h \in [L', L]_{\mathcal{C}}$ が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd}
L' \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dr, "g'"] & & \\
L \arrow[r, "g"'] & M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f'"'] & N
\end{tikzcd}$$

の 2 条件を満たすとき、g を f と f' の**差核** (defference kernel) といい $\mathrm{Ker}(f, f')$ と書く。

$f, f' \in [M, N]_{\mathcal{C}}$ に対して、$g \in [N, P]_{\mathcal{C}}$ が

- $gf = gf'$.
- 射 $g' \in [N, P']_{\mathcal{C}}$ が $g'f = g'f'$ を満たすとき、$g' = hg$ となる $h \in [P, P']_{\mathcal{C}}$ が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f'"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & L \arrow[d, dashed, "h"] \\
& & L'
\end{tikzcd}$$

の 2 条件を満たすとき、g を f と f' の**余差核** (defference cokernel) といい $\mathrm{Coker}(f, f')$ と書く。

差核は単型であり、存在すれば単型の同値を除いて一意的である。また余差核は全型であり、存在すれば全型の同値を除いて一意的である。

圏 $\mathcal{C}$ が零対象をもつとき、差核 $\mathrm{Ker}(f, 0)$ を f の**核** (kernel) といい $\mathrm{Ker}(f)$ と書く。また余差核 $\mathrm{Coker}(f, 0)$ を f の**余核** (cokernel) といい $\mathrm{Coker}(f)$ と書く。

定理 6.20. $\mathcal{AS}_0$ の任意の射 $f : (X, S; x_0) \to (Y, T; y_0)$ は核をもち、それは $f^{-1}(y_0)$ で生成される部分スキームである。

Proof. $f^{-1}(y_0)$ で生成される部分スキームを $\iota:(Z,U;z_0)\to(X,S;x_0)$ とする。定義により $f\iota=0$ が成り立つ。また ι は $\iota(Z)$ で生成される部分スキームと一致していて、更に $\iota(Z)=\{x\in X \mid f(x)=y_0\}$ である。$\iota':(Z',U';z_0')\to(X,S;x_0)$ が $f\iota'=0$ を満たすとする。このとき $\iota'(Z')\subset\iota(Z)$ となるので命題 6.15 により、$\iota'=\iota h$ となる $h:(Z',U';z_0')\to(Z,U;z_0)$ が一意的に存在する。 □

定理 6.21. $\mathcal{AS}_0$ の任意の射 $f:(X,S;x_0)\to(Y,T;y_0)$ は余核をもち、それは $f(X)$ による商スキームである。

Proof. $f(X)$ による商スキームを $\pi:(Y,T;y_0)\to(Z,U;z_0)$ とする。定義により $\pi f=0$ が成り立つ。$\pi':(Y,T;y_0)\to(Z',U';z_0')$ が $\pi'f=0$ を満たすとする。任意の $y\in f(X)$ に対して $\pi'(y)=z_0'$ が成り立つので、命題 6.16 により、$\pi'=h\pi$ となる $h:(Z,U;z_0)\to(Z',U';z_0')$ が一意的に存在する。 □

基本的な射に対する核や余核について以下の命題が成り立つことは明らかである。

命題 6.22. (1) $\mathrm{Ker}((X,S;x_0)\xrightarrow{0}(Y,T;y_0))=I_{(X,S;x_0)}$.

(2) $\mathrm{Coker}((X,S;x_0)\xrightarrow{0}(Y,T;y_0))=I_{(Y,T;y_0)}$.

(3) 部分スキーム ι に対して $\mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(\iota))=\iota$.

(4) 商スキーム π に対して $\mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(\pi))=\pi$.

以上のことから次の定理が成り立つ。

定理 6.23. $\mathcal{AS}_0$ の射 f が部分スキームであることと、ある射の核であることは同値である。$\mathcal{AS}_0$ の射 f が商スキームであることと、ある射の余核であることは同値である。

6.5 像

$\mathcal{C}$ を一般の圏とする。$f:M\to N$ に対して、単型 $i:I\to N$ が f の**像** (image) であるとは、以下の 2 条件が成り立つことをいう。

- $ig=f$ となる $g:M\to I$ が存在する。

- 単型 $j : J \to N$ と $h : M \to J$ が存在して $jh = f$ となるならば、$i = jk$ となる $k : I \to J$ が一意的に存在する。

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr, "h"'] & & N \\
& I \arrow[ur, "i"] \arrow[d, dashed, "k"'] & \\
& J \arrow[uur, "j"'] &
\end{tikzcd}
$$

像は、存在すれば、単型の同値を除いて一意的である。

定理 6.24. $\mathcal{AS}_0$ の任意の射は像をもつ。

Proof. $f : M \to N$ を $\mathcal{AS}_0$ の射とする。$\mathrm{Ker}(f) = g : L \to M$ とし $\mathrm{Coker}(g) = f' : M \to I$ とする。$fg = 0$ であり $f' = \mathrm{Coker}(g)$ であるから、$f = if'$ となる $i : I \to N$ が一意的に存在する。$i = \mathrm{Im}(f)$ であることを示す。

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "g"] & M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"] \arrow[ddr, "f''"'] & & N \\
& & I \arrow[ur, dashed, "i"] \arrow[d, dashed, "h"'] & \\
& & J \arrow[uur, "j"'] &
\end{tikzcd}
$$

単型 $j : J \to N$ と射 $f'' : M \to J$ に対して $jf'' = f$ と仮定する。$0 = fg = jf''g$ であり j が単型なので $f''g = 0$ である。$f' = \mathrm{Coker}(g)$ なので、$h : I \to J$ で $hf' = f''$ なるものが一意的に存在する。

$if' = f = jf'' = jhf'$ であり $f' = \mathrm{Coker}(g)$ は全型であるから $i = jh$ が成り立つ。

あとは i が単型であることを示せばよい。このために $P(i)$ が単射であることをいえばよい。$x, x' \in P(I)$ に対して $i(x) = i(x')$ と仮定する。f' は全型であるから $y, y' \in P(M)$ で $f'(y) = x$, $f'(y') = x'$ となるものが存在する。このとき

$$1 = r(i(x), i(x')) = i(r(x, x')) = if'(r(y, y')) = f(r(y, y'))$$

である。よって $r(y, y') \in g(L)$ であり $f' = \mathrm{Coker}(g)$ なので $1 = f'(r(y, y')) = r(f'(y), f'(y')) = r(x, x')$ である。したがって $x = x'$ であり $P(i)$ は単射である。 □

次の命題は後で必要になる。

命題 6.25. 単型 f の像は f 自身である。

Proof. $f : M \to N$ が単型であるとすると $\mathrm{Ker}(f) = (0 \to M)$ である。よって $\mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f)) = I_M$ であり、$\mathrm{Im}(f) = f$ となる。 □

6.6 完全列

$\mathcal{AS}_0$ における射の列

$$\cdots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \to \cdots$$

を考える。この列が M_i で**完全** (exact) であるとは、$\mathrm{Ker}(f_i) = \mathrm{Im}(f_{i-1})$ が成り立つこととする。すべての M_i で完全であるとき、この列を**完全列** (exact sequence) という。

定理 6.26. $\mathcal{AS}_0$ において以下のことが成り立つ。

(1) $0 \to M \xrightarrow{f} N$ が完全列であることと f が単型であることは同値である。

(2) $M \xrightarrow{f} N \to 0$ が完全列であることと f が商スキームであることは同値である。

(3) $0 \to M \xrightarrow{f} N \to 0$ が完全列であることと f が同型であることは同値である。

(4) $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ が完全列であることと $f = \mathrm{Ker}(g)$ かつ $g = \mathrm{Coker}(f)$ であることは同値である。

Proof. (1) $\mathrm{Im}(0 \to M) = (0 \to M)$ であるから、$0 \to M \xrightarrow{f} N$ が完全列になるための必要十分条件は $\mathrm{Ker}(f) = (0 \to M)$ であることである。またこれは f が単型であることと同値である。

(2) $\mathrm{Ker}(N \to 0) = I_N$ である。よって、$M \xrightarrow{f} N \to 0$ が完全列になるための必要十分条件は $\mathrm{Im}(M \xrightarrow{f} N) = I_N$ となることである。更に、これは $f = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f))$ であること、すなわち f が商スキームであることと同値である。

(3) 商スキーム、かつ単型は同型であることによる。

(4) $f = \mathrm{Ker}(g)$ かつ $g = \mathrm{Coker}(f)$ のとき、f は単型なので、命題 6.25 より $\mathrm{Ker}(g) = f = \mathrm{Im}(f)$ となり $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ は完全列である。

$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ が完全列であるとする。L で完全であることから f は単型、N で完全であることにより g は商スキームである。命題 6.25 により $f = \mathrm{Im}(f)$ であるから、$f = \mathrm{Ker}(g)$ である。このとき g が商スキームであることにより $g = \mathrm{Coker}(f)$ となる。 $\square$

Bibliography

[1] Z. Arad, Y. Erez, and M. Muzychuk, *On even generalized table algebras*, J. Algebraic Combin. **17** (2003), no. 2, 163–170.

[2] Z. Arad, E. Fisman, and M. Muzychuk, *Generalized table algebras*, Israel J. Math. **114** (1999), 29–60.

[3] S. Bang, M. Hirasaka, and S.-Y. Song, *Semidirect products of association schemes*, J. Algebraic Combin. **21** (2005), no. 1, 23–38.

[4] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic combinatorics. I*, The Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc., Menlo Park, CA, 1984.

[5] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, and A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 18, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[6] A. E. Brouwer and C. A. van Eijl, *On the p-rank of the adjacency matrices of strongly regular graphs*, J. Algebraic Combin. **1** (1992), no. 4, 329–346.

[7] C. W. Curtis and I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Pure and Applied Mathematics, Vol. XI, Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London, 1962.

[8] ——, *Methods of representation theory. Vol. I*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1981.

[9] E. C. Dade, *Block extensions*, Illinois J. Math. **17** (1973), 198–272.

[10] ——, *Group-graded rings and modules*, Math. Z. **174** (1980), no. 3, 241–262.

[11] ———, *Clifford theory for group-graded rings*, J. Reine Angew. Math. **369** (1986), 40–86.

[12] P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. (1973), no. 10, vi+97.

[13] Y. Doi, *Bi-Frobenius algebras and group-like algebras*, Hopf algebras, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 237, Dekker, New York, 2004, pp. 143–155.

[14] Yu. A. Drozd and V. V. Kirichenko, *Finite-dimensional algebras*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[15] T. V. Fossum, *Characters and orthogonality in Frobenius algebras*, Pacific J. Math. **36** (1971), 123–131.

[16] L. C. Grove, *Groups and characters*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons Inc., New York, 1997.

[17] P. Grzeszczuk, *On G-systems and G-graded rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **95** (1985), no. 3, 348–352.

[18] A. Hanaki and M. Hirasaka, *Theory of Hecke algebras to association schemes*, SUT J. Math. **38** (2002), no. 1, 61–66.

[19] A. Hanaki and K. Uno, *Algebraic structure of association schemes of prime order*, J. Algebraic Combin. **23** (2006), no. 2, 189–195.

[20] A. Hanaki and M. Yoshikawa, *On modular standard modules of association schemes*, J. Algebraic Combin. **21** (2005), no. 3, 269–279.

[21] D. G. Higman, *Schur relations for weighted adjacency algebras*, Symposia Mathematica, Vol. XIII (Convegno di Gruppi e loro Rappresentazioni, INDAM, Rome, 1972), Academic Press, London, 1974, pp. 467–477.

[22] ———, *Coherent configurations. I. Ordinary representation theory*, Geometriae Dedicata **4** (1975), no. 1, 1–32.

[23] ———, *Coherent configurations. II. Weights*, Geometriae Dedicata **5** (1976), no. 4, 413–424.

[24] ______, *Coherent algebras*, Linear Algebra Appl. **93** (1987), 209–239.

[25] M. Hirasaka and M. Muzychuk, *Association schemes generated by a non-symmetric relation of valency 2*, Discrete Math. **244** (2002), no. 1-3, 109–135.

[26] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[27] I. M. Isaacs, *Character theory of finite groups*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1976.

[28] M. Kiyota and H. Suzuki, *Character products and Q-polynomial group association schemes*, J. Algebra **226** (2000), no. 1, 533–546.

[29] V. Linchenko and S. Montgomery, *A Frobenius-Schur theorem for Hopf algebras*, Algebr. Represent. Theory **3** (2000), no. 4, 347–355.

[30] B. Mitchell, *Theory of categories*, Pure and Applied Mathematics, Vol. XVII, Academic Press, New York, 1965.

[31] S Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 82, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1993.

[32] A. Munemasa, *Splitting fields of association schemes*, J. Combin. Theory Ser. A **57** (1991), no. 1, 157–161.

[33] H. Nagao and Y. Tsushima, *Representations of finite groups*, Academic Press Inc., Boston, MA, 1989.

[34] W. Narkiewicz, *Elementary and analytic theory of algebraic numbers*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[35] D. Passman, *Permutation groups*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1968.

[36] R. Peeters, *On the p-ranks of the adjacency matrices of distance-regular graphs*, J. Algebraic Combin. **15** (2002), no. 2, 127–149.

[37] P. Terwilliger, *The subconstituent algebra of an association scheme. I*, J. Algebraic Combin. **1** (1992), no. 4, 363–388.

[38] ______, *The subconstituent algebra of an association scheme. II*, J. Algebraic Combin. **2** (1993), no. 1, 73–103.

[39] ______, *The subconstituent algebra of an association scheme. III*, J. Algebraic Combin. **2** (1993), no. 2, 177–210.

[40] M. Yoshikawa, *Modular adjacency algebras of Hamming schemes*, J. Algebraic Combin. **20** (2004), no. 3, 331–340.

[41] ______, *The intersection of normal closed subsets of an association scheme is not always normal*, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. **40** (2005), 37–40.

[42] P.-H. Zieschang, *An algebraic approach to association schemes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1628, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[43] ______, *Theory of association schemes*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

Index