Introduction to Modular Representation Theory of Finite Groups I

花木 章秀　信州大学理学部

1998. 7. 27

専門外の人でも分かる有限群のモジュラー表現の話をして欲しいということで、和田さんと 2 つの講演をすることになった。和田さんの講演で色々な問題や予想に関する話があり、ここでは教科書に出ているような基本的なことの解説などがほとんどである。モジュラー表現の標準的な教科書としては Feit [3], 永尾–津島 [8] などがある。用語の定義や基本的な性質はいちいち文献を書かないがこれらの教科書に出ている。また未解決問題に関することは例えば Feit [3], Michler [7] に色々と書いてある。また渡辺 [11] は日本語で専門外の人のために書いてあるので読みやすい。

1　定義と基本的な性質

以下 p は素数、G は有限群、(K, R, F) は p-モジュラー系とする。すなわち R は完備離散付値環、K は R の商体、F は R の極大イデアル (π) による剰余体 $R/(\pi)$、K は標数 0、F は標数 p であるとする。また K, F は 1 の $|G|$ 乗根をすべて含むものとする。このとき K, F は G の任意の部分群の分解体になる。ν_p は $\nu_p(p) = 1$ である R の付値とする。すなわち整数 n に対しては $\nu_p(n) = a$ であることは $p^a \mid n$ かつ $p^{a+1} \nmid n$ ということである。本稿では加群はすべて有限生成右加群とする。また $H <_G K$ はある $g \in G$ があって $H^g < K$ となることとする。等号などにも同じ書き方をする。

群環 FG の両側イデアルとしての直既約分解を $FG = B_0 \oplus B_1 \oplus \cdots \oplus B_t$ とする。このときの B_i を G の <u>ブロック</u> といい、$\mathrm{Bl}(G) = \{B_i \mid 1 \leq i \leq t\}$ と置く。FG のブロック分解は 1 の中心的原始べき等元分解 $1 = e_{B_0} + e_{B_1} + \cdots + e_{B_t}$ と $B_i = FGe_{B_i}$ という関係で対応している。e_{B_i} を <u>ブロックべき等元</u> という。

任意の直既約 FG-加群 V に対して唯一つのブロック B_i があって、$V = Ve_{B_i}$, $Ve_{B_j} = 0$ $(i \neq j)$ となる。このとき V は B_i に属するという。自明な FG-加群 F_G が属するブロックを <u>主ブロック</u> といい $B_0(G)$ と書く。

V を直既約 FG-加群とし、H を G の部分群とする。V が H-射影的 であるとは、ある FH-加群 W が存在して V が $W^G = W \otimes_{FH} FG$ の直和因子と同型であることとする。G の部分群 P が V の ヴァーテックス であるとは、V が P-射影的であり、V が H-射影的なら $P \leq_G H$ となることをいう。任意の直既約加群 V に対してヴァーテックスは常に存在し、G-共役を除いて一意的である。またヴァーテックスは p-群になる。V のヴァーテックスを $\mathrm{vx}(V)$ と書く。

V が射影加群であることと $\mathrm{vx}(V) = 1$ であることは同値である。また自明な FG-加群 F_G のヴァーテックスは G のシロー群である。

B を G のブロックとする。G の部分群 D が B の 不足群 であるとは、B に属する直既約加群 V_0 が存在して $D =_G \mathrm{vx}(V_0)$ であり、B に属する任意の直既約加群 V に対して $D \geq_G \mathrm{vx}(V)$ となることである。B の不足群を $\delta(B)$ と書く。任意のブロック B に対して不足群は常に存在し、G-共役を除いて一意的である。また不足群はある直既約加群のヴァーテックスなので、やはり p-群である。特に主ブロック $B_0(G)$ の不足群は $\mathrm{vx}(F_G)$ がシロー群なので、やはりシロー群である。$\mathrm{d}(B) = \nu_p(|\delta(B)|)$ と置いてこれを B の 不足数 という。

不足群の基本的性質として、次のようなことが成り立つ。

命題 1. P が G の正規 p-部分群ならば、任意の $B \in \mathrm{Bl}(G)$ に対して $P \leq \delta(B)$ である。

命題 2. 任意の $B \in \mathrm{Bl}(G)$ に対して $\mathrm{O}_p(\mathrm{N}_G(\delta(B))) = \delta(B)$ である。

$X : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ を G の F-表現とする。$g \in G$ に対して $X(g)$ の固有値はすべて 1 の $|G|_{p'}$ 乗根である。またこの固有値は g の p'-部分だけで決まる。F における 1 の $|G|_{p'}$ 乗根と R における 1 の $|G|_{p'}$ 乗根との間には乗法を保つ一対一対応がある。X によって与えられる Brauer 指標 とは $X(g)$ の固有値に対応する R における 1 の $|G|_{p'}$ 乗根の和をいう。Brauer 指標は R (または K) に値を持つ G の p'-共役類上の関数である。Brauer 指標が既約であるとは、対応する表現が既約であることとし、Brauer 指標がブロック B に属するとは、対応する加群が B に属することとする。

${}^* : RG \to FG$ を自然な準同型 $R \to R/(\pi) = F$ によって引き起こされる準同型とする。FG における 1 の中心的原始べき等元分解 $1_{FG} = e_{B_0} + e_{B_1} + \cdots + e_{B_t}$ に対して、RG における 1 の中心的原始べき等元分解 $1_{RG} = \widetilde{e_{B_0}} + \widetilde{e_{B_1}} + \cdots + \widetilde{e_{B_t}}$ があって $\widetilde{e_{B_i}}^* = e_{B_i}$ となる。よって RG の両側イデアルとしての直既約分解 $RG = \widetilde{B_0} \oplus \widetilde{B_1} \oplus \cdots \oplus \widetilde{B_t}$ が得られる。したがって FG のブロックと RG のブロックには自然な対応があり、これを同一視して単に G のブロックという。

任意の K-表現はある R-表現と同値である。よって既約 K-表現はこれを通してあるブロックに属すると見ることができる。$\mathrm{Irr}(B)$ は B に属する既約通常指標 (K-指標) 全体の集合、$\mathrm{IBr}(B)$ は B に属する既約 Brauer 指標全体の集合とする。($\mathrm{Irr}(G)$, $\mathrm{IBr}(G)$ はそれぞれ G の既約通常指標全体、既約 Brauer 指標全体の集合である。) B の不足数は次のように既約指標で特徴付けられる。

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(B) &= \max\{\nu_p(|G|) - \nu_p(\chi(1)) \mid \chi \in \mathrm{Irr}(B)\} \\ &= \max\{\nu_p(|G|) - \nu_p(\varphi(1)) \mid \varphi \in \mathrm{IBr}(B)\}\end{aligned}$$

このことから、指標表が与えられたとき、それをブロックに分けることができればその不足数を計算できることが分かる。指標表をブロックに分けることは、次のことから簡単にできる。

G の部分集合 S に対して $\widehat{S} = \sum_{g\in S} g \in RG$ と置く。$\mathrm{Cl}(G)$ は G の共役類全体の集合を表すものとする。$x \in C \in \mathrm{Cl}(G)$, $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して $\omega_\chi(\widehat{C}) = (|G|\chi(x))/(|\mathrm{C}_G(x)|\chi(1))$ と置く。次が成り立つ。

命題 3. χ, $\psi \in \mathrm{Irr}(G)$ が同じブロックに属することと $\omega_\chi(\widehat{C}) \equiv \omega_\psi(\widehat{C}) \pmod{(\pi)}$ がすべての $C \in \mathrm{Cl}(G)$ に対して成り立つことは同値である。

B の通常指標と Brauer 指標には次のような関係がある。$\mathrm{IBr}(G)$ は G の p'-共役類上の関数全体の基底になる。従って通常指標を p'-共役類上に制限すれば $\mathrm{IBr}(G)$ の一次結合で書ける。

$$\chi|_{G_{p'}} = \sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(G)} d_{\chi\varphi}\varphi$$

$d_{\chi\varphi}$ を <u>分解定数</u> という。分解定数 $d_{\chi\varphi}$ は χ を与える既約通常表現から R-表現を通して F-表現を作るとき、そこに既約成分として現れる φ を与える既約 F-表現の数を表し、従って非負整数である。ブロックについては次が成り立つ。

命題 4. $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ と $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$ が異なるブロックに属するとき $d_{\chi\varphi} = 0$ である。

$\mathrm{Irr}(B) = \{\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_k\}$, $\mathrm{IBr}(B) = \{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_l\}$ とするとき、$D_B = (d_{\chi_i\varphi_j})$ を B の <u>分解行列</u> という。

分解行列から $C_B = {}^tD_BD_B$ として得られる行列を <u>Cartan 行列</u> という。Cartan 行列の成分は既約 FG-加群の射影被覆に既約成分として現れる既約加群の数を表す。定義から分かるように C_B は対称行列である。これは群環が対称多元環であることに対応している。

D を G の p-部分群とし、H を $\mathrm{C}_G(D) \leq H \leq \mathrm{N}_G(D)$ を満たす G の部分群とする。$C \in \mathrm{Cl}(G)$ に対して $C^0 = C \cap \mathrm{C}_G(D)$ と定義する。このとき $\mathrm{Br}_D : \mathrm{Z}(FG) \to \mathrm{Z}(FH)$ を $\mathrm{Br}_D(\widehat{C}) = \widehat{C^0}$ で定義すると、これは多元環の準同型になる (今は $\widehat{C} \in FG$ と見ている)。これを Brauer 準同型という。$\mathrm{Bl}(G \mid D) = \{B \in \mathrm{Bl}(G) \mid \delta(B) =_G D\}$ と置くとき次が成り立つ。

定理 5 (Brauer の第一主定理). $\mathrm{Br}_D(e_B) = e_{\varphi(B)}$ によってブロックの一対一対応 $\varphi : \mathrm{Bl}(G \mid D) \to \mathrm{Bl}(\mathrm{N}_G(D) \mid D)$ が得られる。

$B \in \mathrm{Bl}(G \mid D)$ に対応する $\mathrm{N}_G(D)$ のブロックを Brauer 対応子という。第一主定理はブロックの対応があることを主張しているだけでその構造について強いことは言っていない。多くの場合対応するブロックの構造には多くの類似性があり、それに関するいくつかの予想がある (和田さんの報告を参照)。しかし一般にどのような関係があるのかは分かっていない。

2 いくつかの未解決問題とブロックの例

$\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ に対して $\nu_p(\chi(1)) = \nu_p(|G|) - \mathrm{d}(B) + \mathrm{ht}(\chi)$ で $\mathrm{ht}(\chi)$ を定義する。これを χ の高さという。不足数の定義から $\mathrm{ht}(\chi)$ は非負整数で、更に任意のブロック B には $\mathrm{ht}(\chi) = 0$ となる χ がある。

指標の高さとブロックの不足群について次の予想がある。

予想 A (Brauer の高さ予想). $\delta(B)$ がアーベル群であることと B に属するすべての既約通常指標の高さが 0 であることは同値である。

Brauer の高さ予想は G が p-可解のとき Gluck–Wolf [5] で肯定的に解決されている。それ以外の場合でもブロックの様子が分かっている場合には正しいことが確認されているが、それについては [7] を見て頂きたい。

次にブロックの様子がよく分かっている場合について、その指標の個数などを書く。$B \in \mathrm{Bl}(G),\ \delta(B) = D,\ |D| = p^n,\ k(B) = |\mathrm{Irr}(B)|,\ k_0(B) = \sharp\{\chi \in \mathrm{Irr}(B) \mid \mathrm{ht}(\chi) = 0\},\ l(B) = |\mathrm{IBr}(B)|$ と置く。次に示す表は有限表現型、tame 表現型の場合、すなわち不足群が巡回群、dihedral, semidihedral, quaternion の場合の指標の個数である (表現型については例えば [4] を参照)。

D	case	$k(B)$	$k_0(B)$	$l(B)$	
cyclic	$e \mid p^n - 1$	$e + \frac{p^n-1}{e}$	$e + \frac{p^n-1}{e}$	e	Dade [2]
dihedral		$2^{n-2}+3$	4	3	Brauer [1]
		$2^{n-2}+3$	4	2	
		$2^{n-2}+3$	4	1	
quaternion		$2^{n-2}+5$	4	3	Olsson [9]
		$2^{n-2}+4$	4	2	
		$2^{n-2}+3$	4	1	
semidihedral		$2^{n-2}+4$	4	3	Olsson [9]
		$2^{n-2}+3$	4	2	
		$2^{n-2}+4$	4	2	
		$2^{n-2}+3$	4	1	

少なくともこの表では Brauer の高さ予想は正しいことが分かる。また同じ不足群でいくつかの場合が現れるがこれは ineatial quotient $T(b)/D\mathrm{C}_G(D)$ の構造による。しかし一般に $T(b)/D\mathrm{C}_G(D)$ を決めてもブロックの様子がどこまで決まるかは分かっていない。(詳細は省略する。主ブロックのときは $T(b)/D\mathrm{C}_G(D) = \mathrm{N}_G(D)/D\mathrm{C}_G(D)$ であり、すなわち $\mathrm{N}_G(D)$ の本質的に D に作用する部分と思ってよい。)

表現型が wild である場合にも色々な計算がされている。例えば D が $(3,3)$ 型のアーベル群のとき清田 [6], 位数 27 の extra-special 群のとき宇佐美 [10] などがある。

先の例では不足群を決めれば指標の個数などの可能性は有限個しかなかった。一般に次の予想がある。

予想 B (Donovan 予想). p-群 D に対して、D と同型な不足群を持つような群環のブロックは森田同値を除いて有限個しかない。

森田同値は指標の個数が一致することよりも強いことを要求している。この予想も p-可解群に対しては成り立つことが Puig (unpublished) によって示されているらしい。森田同値については和田さんの報告を見て頂きたい。

最後にもう一つの予想を紹介する。

予想 C (Olsson 予想). $B \in \mathrm{Bl}(G)$, $D = \delta(B)$, D' は D の交換子群とする。このとき $k_0(B) \leq |D : D'|$ である。

これも先の表の範囲では正しいことがすぐに分かる。しかしこの予想は p-可解群に対しても未解決である。

Donovan 予想や Olsson 予想がどのような群について確かめられているかはやはり [7] を見て頂きたい。

References

[1] R. Brauer, *On 2-blocks with dihedral defect groups*, Symp. Math. XIII, Academic Press, 367–393.

[2] E. C. Dade, *Blocks with cyclic defect groups*, Ann. Math. (2) **84**, 20–48.

[3] W. Feit, The Representation Theory of Finite Groups, North-Holland, 1982.

[4] P. Gabriel, A. V. Roiter, Representations of Finite-Dimensional Algebras, Springer, 1997.

[5] D. Gluck, T. Wolf, *Brauer's height zero conjecture for p-solvable groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **282**, (1984), 137–152.

[6] M. Kiyota, *On 3-blocks with an elementary abelian defect group of order* 9, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, **31**, (1984) 33–58.

[7] G. O. Michler, *Contributions to modular representation theory of finite groups*, Progress in Math. vol. 95, Birkhäuser, 1991, 99–140.

[8] H. Nagao, Y. Tsushima, Representations of Finite Groups, Academic Press, 1989. (有限群の表現, 裳華房, 1987)

[9] J. B. Olsson, *On 2-blocks with quaternion and quasidihedral defect groups*, J. Alg. **36**, (1975), 212–241.

[10] Y. Usami, *Principal blocks with extra-special defect groups of order* 27, 第 14 回代数的組合せ論研究集会報告集, 216–226.

[11] 渡辺 アツミ, 有限群のモジュラー表現, 数理科学, 1996, 7, 66–71.