アソシエーションスキームの表現

花木 章秀 (信州大学)

アソシエーションスキームの研究は多くの場合、その可換性を仮定して行われる。それは、可換性を仮定しても多くの応用が得られているからである。今のところ、可換性を仮定しないアソシエーションスキームの有用な応用は特に見当たらないが、数学的には可換という仮定は特に重要ではないように思われる。非可換アソシエーションスキームの研究は一般に難しく、それも研究が進まない大きな原因と思われる。

アソシエーションスキームに関する特に重要な文献として坂内–伊藤 [1] が挙げられるが、この本ではほとんどの部分で可換性を仮定している。可換性を仮定しないアソシエーションスキームに関する本は今のところ Zieschang [7] ぐらいしかない。

このノートでは特にアソシエーションスキームの指標理論について考える。Zieschang [7] に基本的な事柄は書いてあるが、それを利用した研究をしようとすると、基本的と思われる内容が不十分で、まだまだ利用しにくいことに気付く。Zieschang [7] の指標理論の不十分な点を補い、また今のところ補うことが出来ない未解決問題を解説するのがこのノートの目的である。

アソシエーションスキームに関する論文などでは坂内–伊藤 [1] の記号が多く用いられているが、このノートでは主に Zieschang [7] の記号を用いる。

もし内容に興味をもったならば、いくつかの具体例を自分で計算してみるとよいだろう。小さなアソシエーションスキームの例は [5] にあり、ほとんどの例の指標表も確認できる。

1　定義と記号

このノートを通して I_n または単に I と書いて n 次単位行列を表す。また J_n または J ですべての成分が 1 である n 次正方行列を表す。行列 M に対して ${}^tM$ でその転置行列を表し、M_{xy} または $M_{x,y}$ でその (x,y)-成分を表す。δ_{xy}, $\delta_{x,y}$ はクロネッカーのデルタとする。

X を有限集合とする。$X \times X$ の部分集合を X 上の**関係** (relation) という。X 上の関係 g に対して

$$g^* := \{(y,x) \mid (x,y) \in g\}$$

とおく。また $x \in X$ と関係 g に対して

$$xg := \{y \in X \mid (x,y) \in g\}, \quad gx := \{y \in X \mid (y,x) \in g\}$$

とおく。明らかに $gx = xg^*$ である。関係 g に対して、その**隣接行列** (adjacency matrix) を σ_g で表す。すなわち σ_g は行、列、共に集合 X で添字付けられた行列で、その (x,y)-

成分は $(x,y)\in g$ のとき 1、$(x,y)\notin g$ のとき 0 と定めたものである。明らかに $\sigma_{g^*}={}^t\sigma_g$ である。

G を X 上のいくつかの空でない関係の集合とする。(X,G) が**アソシエーションスキーム** (association scheme) であるとは

(1) G は $X\times X$ の分割。すなわち $X\times X=\bigcup_{g\in G} g$ であり、任意の $g\in G$ は空でなく、$g,h\in G$ に対して $g\neq h$ ならば $g\cap h=\phi$.

(2) $1:=\{(x,x)\mid x\in X\}\in G$.

(3) $g\in G$ ならば $g^*\in G$.

(4) $f,g,h\in G$ に対して $(x,y)\in h$ ならば $p^h_{fg}=|xf\cap gy|$ は $(x,y)\in h$ の取り方によらず一定である ($f,g,h\in G$ のみで決まる)。

を満たすこととする。X を省略して G をアソシエーションスキームとも言うことにする。(4) の条件が理解しにくいが、条件を隣接行列を使って書き直すと分かりやすい。

(1)' $\sum_{g\in G}\sigma_g=J$, かつ任意の $g\in G$ に対して $\sigma_g\neq 0$.

(2)' ある $1\in G$ があって $\sigma_1=I$.

(3)' $g\in G$ ならば $g^*\in G$.

(4)' ある非負整数 p^h_{fg} があって $\sigma_f\sigma_g=\sum_{h\in G}p^h_{fg}\sigma_h$.

(4) に現れる定数 p^h_{fg} をアソシエーションスキーム (X,G) の**交叉数** (intersection number) という。

問 1.1. 条件 (4) と (4)' が同値であることを示せ。

例 1.2. $\mathcal{G}$ を有限群とし、T をその正則右置換表現とする。すなわち $g\in\mathcal{G}$ に対して $T(g)$ は行、列、共に $\mathcal{G}$ で添字が付けられた行列でその (x,y) 成分は $xg=y$ のとき 1 で、それ以外のとき 0 と定める。$T(g)$ を隣接行列とする $\mathcal{G}$ 上の関係を、同じ記号を使って g と表すことにする。このとき $(\mathcal{G},\mathcal{G})$ はアソシエーションスキームである。

例 1.3 (群アソシエーションスキーム). $\mathcal{G}$ を有限群とし、T をその正則右置換表現とする。$C_1,\cdots,C_k$ を $\mathcal{G}$ の共役類とし、共役和を $\widehat{C}_i$ で表す。$T(\widehat{C}_i)$ を隣接行列とすれば $(\mathcal{G},\{C_1,\cdots,C_k\})$ はアソシエーションスキームである。これを $\mathcal{G}$ の**群アソシエーションスキーム** (group association scheme) という。

例 1.4 (置換群から得られるアソシエーションスキーム). $\mathcal{G}$ を有限集合 X 上の可移置換群とする。$\mathcal{G}$ は自然に $X\times X$ にも作用する。G をこの作用の軌道とすると (X,G) はアソシエーションスキームとなる。

問 1.5. 可移置換群から得られる (X,G) がアソシエーションスキームであることを示せ。

例 1.6 (ハミング・スキーム). $\Omega = \{0, 1\}$ とし $X = \Omega^n$ とする。$x = (x_1, \cdots, x_n),\ y = (y_1, \cdots, y_n \in X$ に対して

$$d(x, y) := |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$$

とおき、これを**ハミング距離**という。

$$g_i := \{(x, y) \mid d(x.y) = i\}$$

として X 上の関係 g_i $(i = 0, 1, \cdots, n)$ を定義する。このとき $(X, \{g_i \mid i = 0, 1, \cdots, n\})$ はアソシエーションスキームである。これを**ハミング・スキーム** (Hamming scheme) といい $H(n)$ と表す。

例 1.7 (関係行列). アソシエーションスキームを具体的に表すには関係行列と呼ばれる行列を用いると便利である。$G = \{1 = g_0, g_1, \cdots, g_d\}$ とする。このとき $R = \sum_{i=0}^{d} i\sigma_{g_i}$ を**関係行列** (relation matrix) という。($1 \in G$ の添字は 0 とするのが標準的である。) 関係行列からアソシエーションスキームが決定されるが、X と G の元の並べ方には自由度がある。関係行列を考えることは有限群の場合で言うと完全な乗法表を与えることとほぼ同じで、したがって X が大きなときにはあまり良い記述ではない。しかし、群の作用やグラフなどの組合せ論的な情報のないアソシエーションスキームを具体的に記述するためには、他に良い方法は見当たらない。

ハミング・スキーム $H(2)$ の関係行列は以下の通りである。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 00 & 01 & 10 & 11 \end{array} \\ \begin{array}{c} 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

問 1.8. ハミング・スキームについて

(1) ハミング・スキーム $H(3)$ の関係行列を書け。

(2) ハミング距離が距離の公理を満たすことを示せ。

(3) p_{fg}^h を計算せよ。

(4) ハミング・スキームがアソシエーションスキームであることを示せ。

(5) $\Omega = \{0, 1, \cdots, q-1\}$ として、同様にアソシエーションスキームが定義できることを示せ。(これもハミング・スキームと呼び $H(n, q)$ と書く。)

例 1.9 (ジョンソン・スキーム). $\Omega = \{1, 2, \cdots, v\}$ とし k を $k \leq v/2$ なる自然数とする。X を Ω の k-部分集合全体の集合とする。$x, y \in X$ に対して

$$d(x, y) := k - |x \cap y|$$

とおく。

$$g_i := \{(x, y) \mid d(x, y) = i\}$$

として X 上の関係 g_i $(i=0,1,\cdots,k)$ を定義する。このとき $(X,\{g_i \mid i=0,1,\cdots,k\})$ はアソシエーションスキームである。これを**ジョンソン・スキーム** (Johnson scheme) といい $J(v,k)$ と表す。

$J(4,2)$ の関係行列は以下の通りである。

$$
\begin{array}{c}
\\ 12\\13\\14\\23\\24\\34
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \end{array}\\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2\\
1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1\\
1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1\\
1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1\\
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1\\
2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

問 1.10. ジョンソン・スキームについて

(1) ジョンソン・スキーム $J(5,2)$ の関係行列を書け。

(2) $d(x,y)$ が距離の公理を満たすことを示せ。

(3) p^h_{fg} を計算せよ。

(4) ジョンソン・スキームがアソシエーションスキームであることを示せ。

(5) $k \le v/2$ という仮定をなくしてもジョンソン・スキームは定義できる。しかし $J(v,k)$ と $J(v,v-k)$ はアソシエーションスキームとして本質的に同じものであるので $k \le v/2$ という仮定しても一般性を失わない。このことを示せ。

例 1.11 (距離正則グラフ, P-多項式スキーム). G の元の適当な番号付け $G=\{1=g_0,g_1,\cdots,g_d\}$ と有理係数多項式 $f_i(x)$ $(i=0,1,\cdots,d, \deg f_i = i)$ があって $\sigma_{g_i}=f_i(\sigma_{g_1})$ と書け、更に任意の $g_i \in G$ に対して ${g_i}^* = g_i$ であるとき G を ***P*-多項式スキーム** (P-polynomial scheme) と呼ぶ。また σ_{g_1} を隣接行列として定義される単純グラフを**距離正則グラフ** (distance-regular graph) と呼ぶ。特に $d=2$ の距離正則グラフを**強正則グラフ** (strongly-regular graph) という。

ハミング・スキームとジョンソン・スキームは P-多項式スキームである。

アソシエーションスキームの条件 (4)' から

$$\mathbb{Z}G := \bigoplus_{g\in G} \mathbb{Z}\sigma_g$$

は環になる。単位元 1 を持つ可換環 R に対して

$$RG := \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} R$$

は R-代数となる。これを G の R 上の**隣接代数** (adjacency algebra) という。より簡単に言うと σ_g を R を成分とする行列と見て、$\{\sigma_g \mid g \in G\}$ の生成する行列環が RG である。

例 1.12. 例 1.2 のアソシエーションスキームの隣接代数は自然に群代数と同型である。

例 1.13. 例 1.3 の群アソシエーションスキームの隣接代数は自然に群代数の中心と同型である。

例 1.14. 例 1.4 のアソシエーションスキームの隣接代数は置換群から得られるヘッケ代数と同型である。

$\mathbb{Z}G$ が可換環のとき、すなわち $p_{fg}^h = p_{gf}^h$ が任意の $f, g, h \in G$ について成り立つとき、アソシエーションスキーム (X, G) は**可換** (commutative) であるという。また任意の $g \in G$ について $g^* = g$ であるとき (X, G) は**対称** (symmetric) であるという。

問 1.15. 対称アソシエーションスキームは可換であることを示せ。

アソシエーションスキームの定義から得られるいくつかの事柄を示しておく。

命題 1.16. (X, G) をアソシエーションスキームとする。$g \in G$, $x \in X$ に対して $n_g := |xg| = |gx|$ であり、この値は $x \in X$ の取り方によらない。言い換えると、隣接行列 σ_g の各行、各列にはちょうど n_g 個の 1 がある。

証明. $x \in X$ に対し $(x, x) \in 1$ なので $p_{gg^*}^1 = |xg \cap g^*x| = |xg|$ であり、これは $x \in X$ の取り方によらない。また $|xg|$ は σ_g の x に対応する行に含まれる 1 の数に等しい。同様に $|gx|$ は σ_g の x に対応する列に含まれる 1 の数に等しいく、この値も $x \in X$ の取り方によらない。よって σ_g の成分すべての和を考えれば $|xg| = |gx|$ である。 □

この命題の n_g を $g \in G$ の**分岐指数** (valency) という。以後、断りなしに $g \in G$ の分岐指数を n_g と書く。$S \subset G$ に対して $\sigma_S := \sum_{g \in S} \sigma_g$, $n_S := \sum_{g \in S} n_g$ とおく。特に $\sigma_G = J$ であり、また $n_G = |X|$ である。n_G を (X, G) の**位数** (order) という。

交叉数 p_{fg}^h は隣接代数の構造定数と見ることもできる。これに関するいくつかの公式を示す。

命題 1.17. 交叉数 p_{fg}^h と分岐指数 n_g について次が成り立つ。

(1) $n_g = n_{g^*}$.

(2) $p_{1g}^h = p_{g1}^h = \delta_{gh}$.

(3) $p_{fg}^1 = n_f \delta_{f^*g}$.

(4) $p_{fg}^h = p_{g^*f^*}^{h^*}$.

(5) $\sum_{h \in G} p_{fg}^h p_{hk}^\ell = \sum_{h \in G} p_{gk}^h p_{fh}^\ell$.

(6) $\sum_{g \in G} p_{fg}^h = \sum_{g \in G} p_{gf}^h = n_f$.

(7) $n_h p_{fg}^{h^*} = n_g p_{hf}^{g^*} = n_f p_{gh}^{f^*}$.

証明. (1) σ_{g^*} が σ_g の転置行列であることと命題 1.16 より分かる。

(2) σ_1 は単位行列なので明らか。

(3) $x \in X$ に対して $p^1_{fg} = |xf \cap gx| = |f^*x \cap gx|$ なので $f^* \neq g$ ならば $p^1_{fg} = 0$ であり $f^* = g$ ならば $p^1_{fg} = |f^*x| = n_f$ である。

(4) $\sigma_f\sigma_g = \sum_{h\in G} p^h_{fg}\sigma_h$ の両辺の転置を考えれば $\sigma_{g^*}\sigma_{f^*} = \sum_{h\in G} p^h_{fg}\sigma_{h^*}$ である。

(5) 乗法の結合法則から得られる。すなわち

$$\begin{aligned}(\sigma_f\sigma_g)\sigma_k = \sum_{h\in G} p^h_{fg}\sigma_h\sigma_k &= \sum_{h\in G}\sum_{\ell\in G} p^h_{fg}p^\ell_{hk}\sigma_\ell \\ \sigma_f(\sigma_g\sigma_k) = \sigma_f\sum_{h\in G} p^h_{gk}\sigma_h &= \sum_{h\in G}\sum_{\ell\in G} p^h_{gk}p^\ell_{fh}\sigma_\ell\end{aligned}$$

なので σ_ℓ の係数をくらべて得られる。

(6) $\sigma_G = \sum_{g\in G}\sigma_g$ はすべての成分が 1 の行列である。よって命題 1.16 より $\sigma_f\sigma_G = n_f\sigma_G = \sigma_G\sigma_f$ である。σ_G をばらして考えれば結果を得る。

(7) (5) で $\ell = 1$ とすれば

$$\sum_{h\in G} p^h_{fg}p^1_{hk} = p^{k^*}_{fg}n_k, \quad \sum_{h\in G} p^h_{gk}p^1_{fh} = p^{f^*}_{gk}n_f$$

である。 □

2 通常表現と指標理論

この節では複素数体 $\mathbb{C}$ 上の隣接代数とその表現、指標の基本的なことを解説する。

K を体とする。K-代数 A の**表現** (representation) とは A からある次数の全行列環 $M_n(K)$ への代数準同型のことである。A の表現を考えることと、右 A-加群を考えることは同等であるので、状況に応じて両方を使う。また特に断らない限り代数や加群は有限次元のもののみを考える。A の表現が**既約** (irreducible) であるとは、対応する加群に自明でない部分加群がないことをいう。既約でないとき**可約** (reducible) であるという。

A の表現 $T : A \to M_n(K)$ に対して $\chi_T : A \to K$ を $\chi_T(a) = \mathrm{trace}\, T(a)$ で定め、これを T から得られる**指標** (character) という。表現 T が既約 (可約) であるとき、指標も既約 (可約) であるという。

$T : A \to M_n(K)$ が A の表現であるとき、正則行列 P に対して $T^P : A \to M_n(K)$ ($a \mapsto P^{-1}T(a)P$) も A の表現である。このとき T と T^P は**同値な表現**であるという。これは対応する加群が同型であることと同値である。同値な表現は同一視する場合も多い。また同値な表現の指標は一致する。

A-加群 M がいくつかの既約加群の直和と同型であるとき M を**完全可約** (completely reducible) であるという。A 自身を右 A 加群と見たものを**右正則加群** (right regular representation) と呼ぶ。右正則加群が完全可約であるとき A を**半単純代数** (semisimple algebra) という。A が半単純代数ならば任意の加群は完全可約である。

定理 2.1. 代数閉体 K 上の有限次元半単純代数 A が半単純であることと A が自明でないべき零イデアルを持たないことは同値である。

定理 2.2. 代数閉体 K 上の有限次元半単純代数はいくつかの全行列環の直和に同型である。

この定理より代数閉体 K 上の有限次元半単純代数は

$$A \cong M_{n_1}(K) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(K)$$

と分解する。各直和因子への射影を π_i $(1 = 1, \cdots, r)$ とすると $\pi_i : A \to M_{n_i}(K)$ が A の既約表現の同値類の完全代表系を与える。特に A の既約表現の同値類の個数は有限である。したがって既約指標の数は有限個である。直和因子 $M_{n_i}(K)$ の単位元 e_i は A の中心的原始べき等元である。したがって既約指標に中心的原始べき等元が対応する。直和因子 $M_{n_i}(K)$ に対応する既約指標を χ_i で表すこととすると、任意の $a \in A$ に対して明らかに $\chi_i(ae_j) = \delta_{ij}\chi_i(a)$ である。

代数閉体 K 上の有限次元半単純代数 A に対して、その既約指標全体の集合を $\mathrm{Irr}(A)$ と表すことにする。

定理 2.3. A を代数閉体 K 上の有限次元半単純代数とする。$\mathrm{Irr}(A)$ は A から K への線形写像の集合と見て一次独立である。特に K の標数が 0 ならば加群の同型類は指標で決定される。

以上、半単純代数に関する定理などは証明しない。必要ならば Drozd–Kirichenko [2] などを見るとよいだろう。

さてアソシエーションスキーム (X, G) の $\mathbb{C}$ 上の隣接代数を考えよう。

定理 2.4. アソシエーションスキーム (X, G) の $\mathbb{C}$ 上の隣接代数 $\mathbb{C}G$ は半単純代数である。

証明. 定理 2.1 を用いる。$0 \neq a = \sum_{g \in G} \alpha_g \sigma_g \in \mathbb{C}G$ に対して、ある $b \in \mathbb{C}G$ があって ab がべき零でないことを示せば十分である。$\alpha_f \neq 0$ である $f \in G$ が存在するので $a\sigma_{f^*}$ を考えれば、その対角成分はすべて $\alpha_f n_f \neq 0$ である。よってその対角成分の和は 0 ではない。一方べき零行列であるための必要十分条件はすべての固有値が 0 となることであり、そのとき対角成分の和は 0 である。よって $a\sigma_{f^*}$ ばべき零でなく、主張が成り立つ。 $\square$

$\mathrm{Irr}(\mathbb{C}G)$ を単に $\mathrm{Irr}(G)$ と書くことにする。写像 $\Gamma : \mathbb{C}G \to M_{n_G}(\mathbb{C})$ $(\sigma_g \mapsto \sigma_g)$ は明らかに隣接代数 $\mathbb{C}G$ の表現になる。これを (X, G) の**標準表現** (standard representation) という。このとき対応する $\mathbb{C}G$-加群の基底として、自然に X を取ることができる。よって標準表現に対応する加群を $\mathbb{C}X$ と書き、これを**標準加群** (standard module) という。また標準表現の指標を**標準指標** (standard character) といい γ で表すことにする。明らかに $\gamma(\sigma_1) = n_G$, $\gamma(\sigma_g) = 0$ $(1 \neq g \in G)$ である。標準指標の既約分解を考え、既約成分 χ の重複度を m_χ と表す。

$$\gamma = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} m_\chi \chi$$

m_χ を単に χ の**重複度** (multiplicity) という。G が例 1.2 のように有限群から得られる場合には標準表現は正則表現であり、既約指標 χ の重複度 m_χ はその次数 $\chi(1)$ に等しい。

アソシエーションスキーム (X, G) に対して、行は $\mathrm{Irr}(G)$ で、列は G で添字の付けられた行列 $(\chi(\sigma_g))$ を G の**指標表** (character table) と呼ぶ。有限群では、指標の値が共役類の上で一定であるから、指標表の列は共役類で添字を付ける。しかしアソシエーションスキームでは共役に相当する適当な概念がないので G そのものを添字に用いる。したがって指標表は一般に正方行列ではない。しかし G が可換の場合には $|G| = |\mathrm{Irr}(G)|$ が成り立つので指標表は正方行列になる。また色々な計算に用いるために指標表に重複度を表す列を付け加える場合もある。

例 2.5 (群アソシエーションスキームの指標表). 群アソシエーションスキームの指標表は元の群の指標表から簡単に求めることができる。群アソシエーションスキームの隣接代数は群環の中心と同型であり、その既約指標は有限群の表現でよく用いられる。

G を有限群とし χ をその既約指標とする。また C_i を G の共役類とする。このとき

$$\omega_\chi(\widehat{C_i}) = \frac{\chi(\widehat{C_i})}{\chi(1)}$$

は $Z(\mathbb{C}G)$ の既約表現で $\mathrm{Irr}(Z(\mathbb{C}G)) = \{\omega_\chi \mid \chi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{C}G)\}$ が成り立つ。

例えば 3 次対称群と、その群アソシエーションスキームの指標表は以下の通りである。

χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
χ_3	2	-1	0

,

				m_{χ_i}
ω_1	1	2	3	1
ω_2	1	2	-3	1
ω_3	1	-1	0	4

このような操作は有限群だけでなく、後に説明する群的スキームに対して行うことができる。

$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対応する $\mathbb{C}G$ の中心的べき等元を e_χ で表す。$\chi, \varphi \in \mathrm{Irr}(G)$ と $a \in \mathbb{C}G$ に対して $\varphi(ae_\chi) = \varphi(a)\delta_{\chi\varphi}$ である。また $1 = \sigma_1 = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} e_\chi$ である。

補題 2.6 (反転公式). $u = \sum_{g\in G} \alpha_g\sigma_g \in \mathbb{C}G$ のとき

$$\alpha_g = \frac{1}{n_G n_g} \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} m_\chi \chi(u\sigma_{g^*}).$$

証明. $u\sigma_{f^*} = \sum_{g\in G} \alpha_g\sigma_g\sigma_{f^*}$ の標準指標 γ による値を考えると $\gamma(u\sigma_{f^*}) = \alpha_f n_f n_G$ となる。$\gamma = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} m_\chi \chi$ を代入して結果を得る。 □

命題 2.7. $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して

$$e_\chi = \frac{m_\chi}{n_G} \sum_{g\in G} \frac{1}{n_g} \chi(\sigma_{g^*})\sigma_g.$$

証明. $e_\chi = \sum_{g\in G} \alpha_g\sigma_g$ とおいて反転公式を用いると

$$\alpha_g = \frac{1}{n_G n_g} \sum_{\varphi\in\mathrm{Irr}(G)} m_\varphi \varphi(e_\chi\sigma_{g^*}) = \frac{1}{n_G n_g} m_\chi \chi(\sigma_{g^*})$$

となる。 □

補題 2.8. Φ_χ を $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ を与える既約表現とし $\alpha^\chi_{\mu\nu}$ で Φ_χ の (μ,ν) 成分を表すものとする。このとき $\chi, \varphi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して次が成り立つ。

$$\frac{m_\chi}{n_G}\sum_{g\in G}\frac{1}{n_g}\alpha^\chi_{\mu\nu}(\sigma_{g^*})\alpha^\varphi_{\rho\tau}(\sigma_g) = \delta_{\chi\varphi}\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\tau}.$$

証明. $S = \{(\chi,\mu,\nu) \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G), 1 \le \mu,\nu \le \chi(1)\}$ の要素は $\mathbb{C}G$ の次元、すなわち $|G|$ 個ある。S と G で添字の付けられた行列

$$A = \left(\alpha^\chi_{\mu\nu}(\sigma_g)\right)_{(\chi,\mu,\nu),g}, \quad B = \left(\frac{m_\chi}{n_G n_g}\alpha^\chi_{\nu\mu}(\sigma_{g^*})\right)_{(\chi,\mu,\nu),g}$$

を考える。${}^tAB$ の (f,g)-成分を計算すると

$$\begin{aligned}\sum_{\chi,\mu,\nu}\frac{m_\chi}{n_G n_g}\alpha^\chi_{\mu\nu}(\sigma_f)\alpha^\chi_{\nu\mu}(\sigma_{g^*}) &= \sum_{\chi,\mu}\frac{m_\chi}{n_G n_g}\alpha^\chi_{\mu\mu}(\sigma_f\sigma_{g^*}) \\ = \sum_{\chi}\frac{m_\chi}{n_G n_g}\chi(\sigma_f\sigma_{g^*}) &= \frac{1}{n_G n_g}\gamma(\sigma_f\sigma_{g^*}) = \delta_{fg}\end{aligned}$$

である。よって ${}^tAB = I$ (単位行列) であり、$B^tA = I$ も成り立つ。B^tA の $((\chi,\mu,\nu),(\varphi,\rho,\tau))$-成分を計算して

$$\delta_{\chi\varphi}\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\tau} = \frac{m_\chi}{n_G}\sum_{g\in G}\frac{1}{n_g}\alpha^\chi_{\nu\mu}(\sigma_{g^*})\alpha^\varphi_{\rho\tau}(\sigma_g)$$

を得る。 □

定理 2.9 (指標の (第一) 直交関係). $\chi, \varphi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して次が成り立つ。

$$\frac{m_\chi}{n_G\chi(1)}\sum_{g\in G}\frac{1}{n_g}\chi(\sigma_g)\varphi(\sigma_{g^*}) = \delta_{\chi\varphi}.$$

証明. 補題 2.8 より

$$\begin{aligned}\sum_{g\in G}\frac{1}{n_g}\chi(\sigma_{g^*})\varphi(\sigma_g) &= \sum_{g\in G}\sum_{\mu=1}^{\chi(1)}\sum_{\nu=1}^{\varphi(1)}\frac{1}{n_g}\alpha^\chi_{\mu\mu}(\sigma_{g^*})\alpha^\varphi_{\nu\nu}(\sigma_g) \\ = \delta_{\chi\varphi}\sum_{g\in G}\sum_{\mu=1}^{\chi(1)}\frac{1}{n_g}\alpha^\chi_{\mu\mu}(\sigma_{g^*})\alpha^\chi_{\mu\mu}(\sigma_g) &= \delta_{\chi\varphi}\frac{n_G\chi(1)}{m_\chi}\end{aligned}$$

となる。 □

定理 2.9 の別証明. $\chi, \varphi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して

$$\delta_{\chi\varphi}\varphi(1) = \varphi(e_\chi) = \frac{m_\chi}{n_G}\sum_{g\in G}\frac{1}{n_g}\chi(\sigma_g)\varphi(\sigma_{g^*})$$

である。 □

未解決問題 2.10. 一般に指標 χ が与えられたときに、それが既約かどうかを判定する方法は知られていない。直交関係などから既約性を判定する方法を作りたい。

問 2.11 (一般化された直交関係). $\chi, \varphi \in \mathrm{Irr}(G)$, $a \in \mathbb{C}G$ に対して

$$\frac{m_\chi}{n_G} \sum_{g \in G} \frac{1}{n_g} \chi(a\sigma_g)\varphi(\sigma_{g^*}) = \delta_{\chi\varphi}\chi(a)$$

が成り立つことを示せ。(ヒント：$\delta_{\chi\varphi}\chi(a) = \chi(ae_\varphi)$ を計算せよ。)

例 2.12. 以下の関係行列で定義されるアソシエーションスキームを考える。

$$R = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 \\
1 & 0 & 2 & 2 & 5 & 5 & 6 & 6 & 3 & 3 & 4 & 4 \\
2 & 2 & 0 & 1 & 4 & 6 & 3 & 5 & 4 & 6 & 3 & 5 \\
2 & 2 & 1 & 0 & 6 & 4 & 5 & 3 & 6 & 4 & 5 & 3 \\
3 & 6 & 4 & 5 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 & 2 & 6 & 1 \\
3 & 6 & 5 & 4 & 3 & 0 & 5 & 2 & 2 & 4 & 1 & 6 \\
4 & 5 & 3 & 6 & 2 & 6 & 0 & 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \\
4 & 5 & 6 & 3 & 6 & 2 & 4 & 0 & 1 & 5 & 2 & 3 \\
6 & 3 & 4 & 5 & 4 & 2 & 6 & 1 & 0 & 3 & 2 & 5 \\
6 & 3 & 5 & 4 & 2 & 4 & 1 & 6 & 3 & 0 & 5 & 2 \\
5 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 & 2 & 6 & 0 & 4 \\
5 & 4 & 6 & 3 & 1 & 5 & 2 & 3 & 6 & 2 & 4 & 0
\end{pmatrix}$$

このアソシエーションスキームの指標表は以下の通りである。

	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	m_i
χ_1	1	1	2	2	2	2	2	1
χ_2	1	1	2	-1	-1	-1	-1	2
χ_3	1	-1	0	-1	-1	1	1	3
χ_4	2	0	-2	1	1	-1	-1	3

この指標表の列はスカラー倍を同一視しても 5 通りあり、列に関する直交関係は存在しない。また (例えば関係行列で) 与えられたアソシエーションスキームの指標表を効率よく計算する方法は知られていないようである。

未解決問題 2.13. 有限群の指標表を求める Burnside–Dixon–Schneider アルゴリズムのような効率のよい方法をアソシエーションスキームの指標表について考察せよ。(Burnside–Dixon–Schneider アルゴリズムについては、例えば Grove [3] を参照)。

定理 2.14 (可換アソシエーションスキームの第二直交関係). G が可換ならば次が成り立つ。

$$\frac{1}{n_G n_f} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} m_\chi \chi(\sigma_f)\chi(\sigma_{g^*}) = \delta_{fg}.$$

証明. G が可換だから $|G| = |\mathrm{Irr}(G)|$ である。行と列がそれぞれ $\mathrm{Irr}(G)$, G で添字付けられた行列

$$A = \left(\frac{m_\chi}{n_G n_f}\chi(\sigma_{f^*})\right), \quad B = (\chi(\sigma_f))$$

を考える。直交関係より $A^tB = I$ となるので ${}^tBA = I$ も成り立つ。(f,g)-成分を計算すれば

$$\delta_{fg} = \frac{1}{n_G n_f}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} m_\chi \chi(\sigma_f)\chi(\sigma_{g^*})$$

となる。 □

注意. 後に説明する群的スキームに対して第二直交関係に相当する関係が成り立つ。

有限群の複素指標では、群の元 g に対して $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ が成り立つ。これは $gg^{-1} = g^{-1}g$ より、表現行列として正規行列をとることができることによる。アソシエーションスキームでは g^* が逆元に似た役割をするが $\sigma_g\sigma_{g^*} = \sigma_{g^*}\sigma_g$ とは限らない。また σ_g は対角化可能とも限らない。しかし、一般に $\chi(\sigma_{g^*}) = \overline{\chi(\sigma_g)}$ は成り立つ。これを示すために少し準備をする。

T を指標 χ を与える $\mathbb{C}$ 上の表現とする。$\overline{T} : \sigma_g \mapsto \overline{T(\sigma_g)}$ とすると $\overline{T}$ も G の表現で、T が既約ならば $\overline{T}$ も既約である。対応する指標は $\overline{\chi} : \sigma_g \mapsto \overline{\chi(\sigma_g)}$ である。$\overline{T}$ を T の**複素共役な表現**といい、$\overline{\chi}$ を χ 複素共役な指標という。次に $\widetilde{T} : \sigma_g \mapsto {}^tT(\sigma_{g^*})$ とおく。

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}(\sigma_f\sigma_g) &= \widetilde{T}\left(\sum_{h\in G} p_{fg}^h \sigma_h\right) = \sum_{h\in G} p_{fg}^h \widetilde{T}(\sigma_h) = \sum_{h\in G} p_{fg}^h\, {}^tT(\sigma_{h^*}) \\
&= {}^tT\left(\sum_{h\in G} p_{fg}^h \sigma_{h^*}\right) = {}^tT\left(\sum_{h\in G} p_{g^*f^*}^{h^*} \sigma_{h^*}\right) = {}^tT(\sigma_{g^*}\sigma_{f^*}) \\
&= {}^t(T(\sigma_{g^*})T(\sigma_{f^*})) = {}^tT(\sigma_{f^*})\,{}^tT(\sigma_{g^*}) = \widetilde{T}(\sigma_f)\widetilde{T}(\sigma_g)
\end{aligned}$$

が成り立つので $\widetilde{T}$ も G の表現であり、対応する指標 $\widetilde{\chi}$ は $\widetilde{\chi}(\sigma_g) = \chi(\sigma_{g^*})$ である。$\widetilde{T}$ を T の**反傾表現** (contragredient representation) という。T が既約なら $\widetilde{T}$ も既約である。

次の定理が目標であった。

定理 2.15. 複素指標 χ について $\chi(\sigma_{g^*}) = \overline{\chi(\sigma_g)}$ が成り立つ。

証明. 既約指標 χ について示せば十分である。$\overline{\chi}$ と $\widetilde{\chi}$ について

$$\sum_{g\in G}\frac{1}{n_g}\overline{\chi}(\sigma_g)\widetilde{\chi}(\sigma_{g^*}) = \sum_{g\in G}\frac{1}{n_g}\overline{\chi(\sigma_g)}\chi(\sigma_g) > 0$$

であるから、$\overline{\chi}$ と $\widetilde{\chi}$ が既約であることと直交関係によって $\overline{\chi} = \widetilde{\chi}$ である。よって主張は成り立つ。 □

次に指標の値に注目する。複素指標 χ に対して $\chi(\sigma_g)$ は有理整数を成分とする行列 σ_g のいくつかの固有値の和なので代数的整数である。その絶対値の評価として次の結果を得る。

定理 2.16. 複素指標 χ について $|\chi(\sigma_g)| \leq n_g\chi(1)$ が成り立つ。

証明のために Perron-Frobenius の定理を説明する。

Γ を有限有向グラフとする。すなわち Γ は有限な点集合 $V\Gamma$ と辺集合 $E\Gamma$ からなる。ここで辺集合とは、単に $V\Gamma \times V\Gamma$ の部分集合を意味する。$x, y \in V\Gamma$ が**連結**であるとは、ある非負整数 ℓ と $V\Gamma$ の元の列

$$x = x_0, x_1, \cdots, x_\ell = y$$

が存在して $(x_{i-1}, x_i) \in E\Gamma$ または $(x_i, x_{i-1}) \in E\Gamma$ $(i = 1, 2, \cdots, \ell)$ となることとする。また**強連結**であるとは、$(x_{i-1}, x_i) \in E\Gamma$ $(i = 1, 2, \cdots, \ell)$ となることとする。連結であるという関係は同値関係である。その同値類 (およびそれらの点を両端とする辺) を Γ の**連結成分**という。Γ が一つの連結成分であるとき Γ は**連結**であるという。$V\Gamma$ の任意の順序対 x, y が強連結であるとき Γ を**強連結**であるという。

定理 2.17 (Perron-Frobenius). M を非負実数を成分とする n 次正方行列とする。有限有向グラフを以下のように定める。点集合を $V\Gamma := \{1, \cdots, n\}$ とし、辺集合を

$$E\Gamma := \{(i, j) \mid M_{ij} > 0\}$$

とする。グラフ Γ が強連結であるとする。このとき ρ を M の固有値の絶対値の最大値とすると ρ は M の重複度 1 の固有値である (すなわち固有多項式の単根である)。また ρ に対応する固有ベクトルとして非負実数のみを成分として持つものを取ることができる。逆に、そのような固有ベクトルは ρ に対応するものに限る。

証明は、例えば [4] にある。この定理の ρ を **Frobenius 根**という。

補題 2.18. (X, G) をアソシエーションスキームとし $g \in G$ とする。σ_g を隣接行列とする有限有向グラフの連結成分は強連結である。

証明. σ_g を隣接行列とする有限有向グラフを Γ とする。$V\Gamma = X$ であり $E\Gamma = g$ である。$x, y \in X$ が連結ならば強連結であることを示せばよい。このためには $(x, y) \in g$ ならば y, x が強連結であることを示せばよい。$(x, y) \in g$ とする。

$$\begin{aligned} yg^0 &:= \{y\} \\ yg^\ell &:= \bigcup_{z \in yg^{\ell-1}} zg \\ S &:= \bigcup_{\ell=0}^{\infty} yg^\ell \end{aligned}$$

とおく (S は有限集合である)。このとき $x \in S$ を示せばよい。$E_S := \{(u, v) \in g \mid u \in S, v \in S\}$ とおいて E_S に含まれる辺の数を数える。$u \in S$, $(u, v) \in g$ ならば S の定義から $v \in S$ である。よって

$$|E_S| = \sum_{u \in S} |\{v \in S \mid (u, v) \in g\}| = n_g|S|$$

である。一方 $v \in S$, $(u,v) \in g$ とすると (u が S に含まれるかどうかは分からないので)

$$|E_S| = \sum_{v \in S} |\{u \in S \mid (u,v) \in g\}| \leq n_g |S|$$

である。この等号が成立するから $v \in S$, $(u,v) \in g$ ならば $u \in S$ であり、特に v として y を考えれば $x \in S$ である。 □

定理 2.16 の証明. $\chi(\sigma_g)$ は $\chi(1)$ 個の σ_g の固有値の和だから、任意の固有値 ξ に対して $|\xi| \leq n_g$ を示せばよい。σ_g の固有値は σ_g のある連結成分に対応している。よってはじめから σ_g は連結であると仮定してよい。このとき σ_g は強連結だからフロベニウス根をもつ。一方 σ_g は各行、各列に n_g 個の 1 を含むので n_g は σ_g の固有値であり、また固有ベクトルとしてすべての成分が 1 であるものを取ることができる。よって n_g は σ_g の Frobenius 根であり、絶対値最大の固有値である。 □

3 閉部分集合と剰余スキーム

有限群の部分群と剰余群に相当する閉部分集合と剰余スキームを定義し、その基本的な性質を説明する。そのためにまず複合積を定義する。

(X, G) をアソシエーションスキームとする。$f, g \in G$ に対して

$$fg := \{h \in G \mid p_{fg}^h \neq 0\}$$

とおき、これを f と g の**複合積** (complex product) という。隣接代数における積とは異なるので注意が必要である。また $S^* := \{s^* \mid s \in S\}$ という記号も用いる。$p_{fg}^h = p_{g^*f^*}^{h^*}$ なので

$$(fg)^* = g^* f^*$$

が成り立つ。また $S, T \subset G$ に対して

$$ST := \bigcup_{s \in S} \bigcup_{t \in T} st$$

とおき、これも複合積と呼ぶ。

$\phi \neq H \subset G$ が**閉部分集合** (closed subset) であるとは $HH^* \subset H$ であることとする (G が群であれば H が部分群であることを意味している)。また、任意の $g \in G$ に対して $1 \in gg^*$ であるから H が閉部分集合ならば $1 \in H$ であり、したがって $HH^* \supset H1 = H$ である。よって $HH^* = H$ が成り立つ。

命題 3.1. H が G の閉部分集合であることと $HH \subset H$ であることは同値である (有限群ならば $HH \subset H$ が部分群であることと同値であることに対応している)。

証明. H が閉部分集合であるとする。このとき $H = HH^* = (HH^*)^* = H^*$ であるから $HH = H$ である。

逆に $HH \subset H$ とする。$H^* \subset H$ であることを示せばよい。$\sigma_H = \sum_{h \in H} \sigma_h$ を隣接行列とする (ループを含む) 有向グラフを考え、補題 2.18 の証明と同様の議論をすれば、このグラフの連結成分は強連結、すなわち $H^* \subset H$ となる。 □

$S \subset G$ に対して S を含む最小の閉部分集合は存在する。これを $\langle S \rangle$ と書いて S **の生成する閉部分集合**という。

アソシエーションスキームの閉部分集合は、明らかにアソシエーションスキームではない。しかしアソシエーションスキーム (X, G) とその閉部分集合 H に対して、次のように部分スキームを定義できる。$x \in X$ を一つ固定する。$X' := xH$ とし、$g \in G$ に対して $g' := \{(y, z) \in X' \times X' \mid (y, z) \in g\}$ とする。このとき $G' := \{g' \mid g \in G, g' \neq \phi\}$ とすれば (X', G') はアソシエーションスキームとなる。これを (X, G) の H と $x \in X$ に関する**部分スキーム** (subscheme) といい $(X, G)_{xH}$ と書く。部分スキームは、一般に同型を除いても一意的ではなく $x \in X$ の取り方に依存する。

問 3.2. $(X, G)_{xH}$ がアソシエーションスキームになることを示せ。

G の閉部分集合 H が**正規閉部分集合** (normal closed subset) であるとは、任意の $g \in G$ に対して $gH = Hg$ が成り立つこととする。またこのとき $H \lhd G$ または $G \rhd H$ と書く。任意の $g \in G$ に対して $gHg* = H$ が成り立つとき H を**強正規閉部分集合** (strongly normal closed subset) といい $H \lhd^\sharp G$ または $G \rhd^\sharp H$ と書く。正規閉部分集合と強正規閉部分集合は、どちらもある意味で有限群の正規部分群に対応している。また可換アソシエーションスキームの閉部分集合は常に正規であるが、強正規であるとは限らない。

命題 3.3. 強正規閉部分集合は正規閉部分集合である。

証明. 任意の $g \in G$ に対して $1 \in gg^*$ である。$g^*Hg \subset H$ とすると

$$Hg \subset gg^*Hg \subset gH$$

となる。逆も同様である。 □

次に剰余スキームを定義しよう。

補題 3.4. H をアソシエーションスキーム (X, G) の閉部分集合とする。$x, y \in X$ に対して $xH = yH$ であることと $xH \cap yH \neq \phi$ であることは同値である。

証明. $z \in xH \cap yH$ とする。このとき $(x, z) \in h_1$, $(y, z) \in h_2$ となる $h_1, h_2 \in H$ がある。$x \in yh_2h_1^*$ より $xH \subset yH$ であり、また $y \in xh_1h_2^*$ より $yH \subset xH$ である。逆は明らか。 □

この補題によって X はいくつかの共通部分のない部分集合の和集合に分割される。$X/H := \{xH \mid x \in X\}$ とおく。$g \in G$ に対して

$$g^H := \{(xH, yH) \mid (x_0, y_0) \in g \text{ for some } x_0 \in xH \text{ and } y_0 \in yH\}$$

とおく。

補題 3.5. H をアソシエーションスキーム (X, G) の閉部分集合とする。$f, g \in G$ に対して次は同値である。

(1) $f^H = g^H$.

(2) $f^H \cap g^H \neq \phi$.

(3) $HfH = HgH$.

(4) $HfH \cap HgH \neq \phi$.

証明. (1) $\Longrightarrow$ (2) と (3) $\Longrightarrow$ (4) は明らか。

(2) $\Longrightarrow$ (3) を示す。$(xH, yH) \in f^H \cap g^H$ とする。このとき $x_0, x_1 \in xH$, $y_0, y_1 \in yH$ があって $(x_0, y_0) \in f$, $(x_1, y_1) \in g$ である。また (x_0, x_1), $(y_1, y_0) \in \bigcup_{h \in H} h$ であるから $f \in HgH$ となり H が閉部分集合なので $HfH \subset HgH$ である。逆の包含関係も同様に示される。

(4) $\Longrightarrow$ (1) を示す。$e \in HfH \cap HgH$ とする。また $(x, y) \in e$ とする。このとき $(xH, yH) \in f^H \cap g^H$ である。前と同様の議論で $f \in HgH$ となる。任意に $(uH, vH) \in f^H$ をとる。このときある $u_0 \in uH$, $v_0 \in vH$ があって $(u_0, v_0) \in f$ である。$v_0 \in u_0 f \subset u_0 HgH$ であるから、ある $u_1 \in u_0 H = uH$, $v_1 \in v_0 H = vH$ があって $(u_1, v_1) \in g$ となる。よって $(uH, vH) \in g^H$ となり $f^H \subset g^H$ である。同様に $g^H \subset f^H$ も成り立つ。 $\square$

この補題によって $X/H \times X/H$ はいくつかの (共通部分のない) 部分集合の和集合に分割される。$G//H := \{g^H \mid g \in G\}$ とおく。また G も部分集合 HgH たちの (共通部分のない) 部分集合の和集合に分割される。

定理 3.6. $(X, G)^H := (X/H, G//H)$ はアソシエーションスキームである。

証明. $1^H = \{(xH, xH) \mid x \in X\}$, $(g^H)^* = (g^*)^H$ は明らかである。$e, f, g \in G$ に対して $(xH, yH) \in h^H$ ならば

$$|(xH)f^H \cap g^H(yH)|$$

が $(xH, yH) \in h^H$ の取り方によらないことを示せばよい。ある $x_0 \in xH$, $y_0 \in yH$ があって $(x_0, y_0) \in h$ となるから、はじめから $(x, y) \in h$ としてよい。

$$W := xHfH \cap HgHy$$

とおくと

$$|W| = \sum_{a \in HfH} \sum_{b \in HgH} p_{ab}^h$$

であり、これは $(x, y) \in h$ の取り方によらない。一方

$$z \in W \Longleftrightarrow zH \in (xH)f^H \cap g^H(yH)$$

が成り立つので

$$|(xH)f^H \cap g^H(yH)| = \frac{|W|}{n_H}$$

となり、これは $(xH, yH) \in h^H$ の取り方によらない。 $\square$

この $(X, G)^H$ を G の H による**剰余スキーム** (factor scheme) という。

例 3.7. 閉部分集合と剰余スキームの具体例を示す。以下は有限群 $C_2 \times C_3 (\cong C_6)$ と S_3 の正則置換表現から得られるアソシエーションスキームの関係行列である。

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ \hline 4 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 2 & 5 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

このように行と列をうまく分割すると、対角線上のブロックには 0 と 1 しか現れていないことが分かる。このような分割があるとき $H := \{g_0, g_1\}$ は閉部分集合である。

このときの剰余スキームは以下のように簡単に求めることができる。上のような分割の各ブロックを一つの成分と見て、同じ数字を含むものは同じであるとする。適当に番号を付ければ以下の関係行列を得る。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

H が正規閉部分集合であるとこと、上記の各ブロック毎に、同じ数が各行、各列に同じ数ずつ現れる、ということは同値である。したがって $C_2 \times C_3$ では H は正規で、S_3 では H は正規ではないことが読み取れる。

次は閉部分集合の定義の代数的な言い換えである。

命題 3.8. $\phi \neq H \subset G$ が G の閉部分集合であるここと $e_H := \frac{1}{n_H}\sigma_H (\in \mathbb{C}G)$ がべき等元であることは同値である。

証明のために少し準備をしよう。$\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g \sigma_g \in \mathbb{C}G$ に対して $\mathrm{Supp}(\alpha) := \{g \in G \mid \alpha_g \neq 0\}$ とする。$\mathbb{C}G$ の構造定数が非負であることから次が成り立つ。

補題 3.9. $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g \sigma_g$, $\beta = \sum_{g \in G} \beta_g \sigma_g$ とし、任意の $g \in G$ に対して α_g, β_g は非負の実数とする。このとき $\mathrm{Supp}(\alpha\beta) = \mathrm{Supp}(\alpha)\mathrm{Supp}(\beta)$ が成り立つ。

命題 3.8 の証明. e_H がべき等元であるとする。このとき

$$H = \mathrm{Supp}(e_H) = \mathrm{Supp}(e_H e_H) = \mathrm{Supp}(e_H)\mathrm{Supp}(e_H) = HH$$

となるので H は閉部分集合である。

逆に H を閉部分集合とする。$x, y \in X$ に対して

$$(\sigma_H)_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{if } (x,y) \in \bigcup_{h \in H} h \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。また

$$(\sigma_H)^2{}_{xy} = |xH \cap Hy| = |xH \cap yH| = n_H \delta_{xH, yH}$$

であり $xH = yH$ であることと $(x,y) \in \bigcup_{h \in H} h$ であることは同値なので e_H はべき等元となる。 □

命題 3.10. $\phi \neq H \subset G$ が G の正規閉部分集合であることと $e_H = \frac{1}{n_H}\sigma_H (\in \mathbb{C}G)$ が中心的べき等元であることは同値である。

証明. e_H が中心的べき等元ならば $g \in G$ に対して

$$gH = \mathrm{Supp}(\sigma_g \sigma_H) = \mathrm{Supp}(\sigma_H \sigma_g) = Hg$$

となり $H \lhd G$ である。

逆に $H \lhd G$ とする。$x, y \in X$, $g \in G$ に対して

$$xH \cap gy \neq \phi \iff y \in xHg = xgH \iff xg \cap Hy \neq \phi$$

が成り立つ。$(\sigma_g \sigma_H)_{xy} = |xg \cap Hy|$, $(\sigma_H \sigma_g)_{xy} = |xH \cap gy|$ なので $(\sigma_g \sigma_H)_{xy} = 0$ であることと $(\sigma_H \sigma_g)_{xy} = 0$ であることは同値である。

$xg \cap Hy \neq \phi$ とする。このとき $|xg \cap Hy| = |xH \cap gy|$ を示せばよい。

$$X = Hy_1 \cup Hy_2 \cup \cdots \cup Hy_r$$

を共通部分のない X の分割とする。

$$xg = \bigcup_{xg \cap Hy_i \neq \phi} (xg \cap Hy_i)$$

と xg を分割する。$xg \cap Hy_i \neq \phi$ のとき、$y_i' \in xg \cap Hy_i$ とすれば $y_i' \in xg$, $Hy_i = Hy_i'$ である。よって

$$|xg \cap Hy_i| = |xg \cap Hy_i'| = \sum_{h \in H} p_{gh}^g$$

は $g \in G$ だけで決まる数である。また $xg \cap Hy_i \neq \phi$ となることは、剰余スキーム $(X, G)^H$ で $y_i H \in (xH) g^H$ となることと同値であり、よって $xg \cap Hy_i \neq \phi$ となる i は n_{g^H} 個ある。以上より

$$n_g = |xg| = n_{g^H} |xg \cap Hy|$$

が成り立つ。同様にして $n_g = n_{g^H} |xH \cap gy|$ が成り立ち、定理の主張が成り立つ。 □

後で用いるために証明の中で示したことを補題としてまとめておく。

補題 3.11. (X, G) をアソシエーションスキームとし H をその正規閉部分集合とする。$g \in G$ に対して $\sigma_g \sigma_H = \sigma_H \sigma_g = \frac{n_g}{n_{g^H}} \sigma_{HgH}$ が成り立つ。特に $n_{HgH} = n_H n_{g^H}$ である。

証明. 命題 3.10 の証明中の記号を用いる。$(x, y) \in f$ とし $|xg \cap Hy| \neq \phi$ とする。このとき $f \in HgH$ である。逆に $f \in HgH$ なら $|xg \cap Hy| \neq \phi$ であることも明らか。よって命題 3.10 の証明よりはじめの主張が成り立つ。また、この両辺の分岐指数をくらべて $n_{HgH} = n_H n_{g^H}$ を得る。 □

任意の $g \in G$ について $n_g = 1$ であるとき (X, G) を**細スキーム** (thin scheme) という。細スキームは本質的に有限群と思うことができる。

命題 3.12. アソシエーションスキーム (X, G) と閉部分集合 H に対して $G//H$ が細スキームであることと $H \lhd^\sharp G$ であることは同値である。

この命題は次の補題から明らかである。

補題 3.13. G の閉部分集合 H と $g \in G$ に対して $n_{g^H} = 1$ であることと $g^* H g \subset H$ であることは同値である。

証明. まず $n_{g^H} = 1$ とする。$f \in g^* H g,\ (x, y) \in f$ とする。このとき、ある $u, v \in X$ があって $u \in xg^*, v \in uH \cap gy$ である。$v \in uH$ より $uH = vH$ である。また $(u, x) \in g$ より $(uH, xH) \in g^H$ であり、$(v, y) \in g$ より $(uH, yH) = (vH, yH) \in g^H$ である。$n_{g^H} = 1$ より $xH = yH$ で、すなわち $f \in H$ である。

次に $g^* H g \subset H$ とする。$(xH, yH),\ (xH, zH) \in g^H$ とする。ある $x_0, x_1, y_0, z_0 \in X$ があって $x_0 \in xH,\ x_1 \in xH,\ y_0 \in yH,\ z_0 \in zH,\ (x_0, y_0), (x_1, z_0) \in g$ である。このとき $z_0 \in y_0 g^* H g \subset y_0 H$ であり、よって $z \in yH$、すなわち $yH = zH$ が成り立ち $n_{g^H} = 1$ である。 □

$$\mathbf{O}^\vartheta(G) := \bigcap_{H \lhd^\sharp G} H$$

とおいて、これを G の**細剰余** (thin residue) という。

定理 3.14. $\mathbf{O}^\vartheta(G) \lhd^\sharp G$ であり、また

$$\mathbf{O}^\vartheta(G) = \left\langle \bigcup_{g \in G} g^* g \right\rangle$$

が成り立つ。

証明. 閉部分集合の共通部分はまた閉部分集合なので $\mathbf{O}^\vartheta(G)$ は閉部分集合である。任意の $f \in G$ に対して

$$f^* \mathbf{O}^\vartheta(G) f = f^* \left(\bigcap_{H \lhd^\sharp G} H \right) f = \bigcap_{H \lhd^\sharp G} f^* H f \subset \bigcap_{H \lhd^\sharp G} H = \mathbf{O}^\vartheta(G)$$

となるから $\mathbf{O}^\vartheta(G) \lhd^\sharp G$ である。

$K = \left\langle \bigcup_{g \in G} g^* g \right\rangle$ とおく。任意の $g \in G$ に対して $g^* g \subset g^* \mathbf{O}^\vartheta(G) g \subset \mathbf{O}^\vartheta(G)$ であるから $K \subset \mathbf{O}^\vartheta(G)$ である。あとは $K \lhd^\sharp G$ を示せばよい。

$e \in g^* g$ とする。$f \in G$ に対して $f^* e f \subset f^* g^* g f$ だから、まず $f^* g^* g f \subset K$ を示す。$h \in gf$ に対して $g \in hf^*$ であるから $h^* g f \subset h^* h f^* f \subset K$ である。$h^* \in (gf)^* = f^* g^*$ を任意にとっているから $f^* g^* g f \subset K$ が成り立つ。

一般には $e_1 e_2 \cdots e_r,\ \ e_i \in g_i^* g_i$ と $f \in G$ に対して $f^* e_1 \cdots e_r f \subset K$ を示せばよい。$f^* e_i f \subset K$ なので

$$f^* e_1 \cdots e_r f \subset (f^* e_1 f)(f^* e_2 f) \cdots (f^* e_r f) \subset K$$

である。 □

注意. $\mathbf{O}^\vartheta(G) \supsetneq \bigcup_{f\in G} g^*g$ である例は多く存在する。しかし原始的なもの (自明でない閉部分集合をもたないもの) でそのような例は見つかっていないようである。

この定理から $G//\mathbf{O}^\vartheta(G)$ は細スキームであり、本質的に有限群である。また任意の強正規閉部分集合 H は $\mathbf{O}^\vartheta(G)$ を含む。アソシエーションスキームに対しても、いわゆる同型定理 [7, Theorem 1.7.6] は成り立つので、強正規閉部分集合とは、単に有限群 $G//\mathbf{O}^\vartheta(G)$ の正規部分群の逆像のことである。

細剰余とは相対的に

$$\mathbf{O}_\vartheta(G) := \{g \in G \mid n_g = 1\}$$

を**細根基** (thin radical) というが、このノートでは必要としない。

注意. 細根基 $\mathbf{O}_\vartheta(G)$ は一般に G の閉部分集合ではあるが正規閉部分集合ではない。例 2.12 がそのような例になっている。

4 剰余スキームの指標

アソシエーションスキームの研究が難しいことの一つの原因は、その部分スキームや剰余スキームと元のアソシエーションスキームの構造の間の関係があまり研究されておらず、したがって帰納法などの議論がしにくいことにある。ここでは剰余スキーム、特に正規閉部分集合による剰余スキームの表現を考える。

いくつかの準備をしよう。

補題 4.1. (X, G) をアソシエーションスキームとし H, K をその閉部分集合とする。$g \in G$ に対して $\sigma_H\sigma_g\sigma_K = \sum_{f\in G} \alpha_f\sigma_f$ とすると

$$\alpha_f = \begin{cases} \alpha_g, & \text{if } f \in HgK, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。

証明. $f \notin HgK$ ならば $\alpha_f = 0$ であることは明らかなので $f \in HgK$ とする。$(x, y) \in f$ に対して

$$\alpha_f = ((\sigma_H\sigma_g)\sigma_K)_{xy} = \sum_{z\in X}(\sigma_H\sigma_g)_{xz}(\sigma_K)_{zy} = \sum_{z\in yK}(\sigma_H\sigma_g)_{xz} = \sum_{z\in yK}|xH \cap gz|$$

である。また、ある $x_0 \in xH$ と $y_0 \in yK$ があって $(x_0, y_0) \in g$ となる。このとき $xH = x_0H$, $yK = y_0K$ であるから

$$((\sigma_H\sigma_g)\sigma_K)_{xy} = \sum_{z\in yK}|xH \cap gz| = \sum_{z\in y_0K}|x_0H \cap gz| = (\sigma_H\sigma_g\sigma_K)_{x_0y_0}$$

が成り立ち $\alpha_f = \alpha_g$ である。 □

H を (X, G) の閉部分集合とすると e_H はべき等元であり $e_H\mathbb{C}Ge_H$ は e_H を単位元とする代数となる。次の補題は補題 4.1 より明らかである。

補題 4.2. H を (X,G) の閉部分集合とする。$g \in G$ に対して $\sigma_H \sigma_g \sigma_H$ は σ_{HgH} のスカラー倍であり、よって $\{\sigma_{HgH} \mid g \in G\}$ はベクトル空間として $e_H \mathbb{C}G e_H$ を生成する。

定理 4.3. H を (X,G) の閉部分集合とする。このとき代数として $\mathbb{C}(G//H) \cong e_H \mathbb{C}G e_H$ が成り立つ。

証明. $x, y \in X$ に対して

$$(x,y) \in \bigcup_{f \in HgH} f \Longleftrightarrow (xH, yH) \in g^H$$

である。よって

$$X = x_1 H \cup \cdots \cup x_r H$$

を X の分割とし X と X/H をこの順番で並べて隣接行列 σ_{HgH} と σ_{g^H} を考えれば $\sigma_{HgH} = \sigma_{g^H} \otimes J$ となる。したがって $e_H \mathbb{C}G e_H \to \mathbb{C}(G//H)$ を $\sigma_{HgH} \mapsto n_H \sigma_{g^H}$ で定めれば、これは代数の同型を与える。 □

定理 4.4. H を (X,G) の閉部分集合とする。このとき $\{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \mid e_\chi e_H \neq 0\}$ と $\mathrm{Irr}(G//H)$ の間に自然な全単射がある。

証明. $T : \mathbb{C}G \to \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} M_{\chi(1)}(\mathbb{C})$ を同型とし、各成分への射影を $T_\chi : \mathbb{C}G \to M_{\chi(1)}(\mathbb{C})$ とする。

$$e_H \mathbb{C}G e_H \cong \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} T_\chi(e_H) M_{\chi(1)}(\mathbb{C}) T_\chi(e_H)$$

である。ここで全行列環におけるべき等元の標準形を考えれば $T_\chi(e_H)$ は 1 と 0 のみを対角成分にもつ対角行列としてよい。また $T_\chi(e_H)$ の階数を r_χ とする。このとき $T_\chi(e_H) M_{\chi(1)}(\mathbb{C}) T_\chi(e_H)$ は自然に $M_{r_\chi}(\mathbb{C})$ と同型である。以上より $e_H \mathbb{C}G e_H$ の既約成分は $r_\chi \neq 0$ である $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対応する。また $r_\chi = \chi(e_H)$ であるから $r_\chi \neq 0$ であることと $e_\chi e_H \neq 0$ であることは同値である。 □

次に H が正規閉部分集合である場合を考えよう。この場合には一般の閉部分集合の場合よりも強いことがいえる。

定理 4.5. H を (X,G) の正規閉部分集合とする。このとき $\mathbb{C}G \to \mathbb{C}(G//H)$ ($\sigma_g \mapsto \frac{n_g}{n_{g^H}} \sigma_{g^H}$) は代数全準同型である。

証明. $H \lhd G$ より e_H は中心的べき等元である。$\pi : \mathbb{C}G \to e_H \mathbb{C}G$ ($\sigma_g \mapsto e_H \sigma_g$) は代数の全準同型である。また $\tau : e_H \mathbb{C}G \to C(G//H)$ ($\sigma_{HgH} \mapsto \frac{1}{n_H} \sigma_{g^H}$) は同型である。補題 3.11 より $\sigma_H \sigma_g = \frac{n_g}{n_{g^H}} \sigma_{HgH}$ であるから

$$\tau \circ \pi(\sigma_g) = \tau\left(\frac{1}{n_H} \sigma_H \sigma_g\right) = \tau\left(\frac{n_g}{n_{g^H} n_H} \sigma_{HgH}\right) = \frac{n_g}{n_{g^H}} \sigma_{g^H}$$

である。 □

注意. F を正標数の体とする。n_g/n_{g^H} は整数になるので、このときも代数準同型 $FG \to F(G//H)$ を定義することは出来るが、一般にそれは全射になるとは限らない。

$H \lhd G$ とし $T : \mathbb{C}(G//H) \to M_n(\mathbb{C})$ を $G//H$ の表現とする。このとき $T \circ \pi : \mathbb{C}G \to M_n(\mathbb{C})$ は G の表現である。また T が既約表現であることと T が全射であることは同値であり、このとき $T \circ \pi$ も全射になるから $T \circ \pi$ も既約である。したがって $G//H$ の $\mathbb{C}$ 上の既約表現から G の既約表現が得られる。また実際の表現は

$$T \circ \pi(\sigma_g) = \frac{n_g}{n_{g^H}} T(\sigma_{g^H})$$

となる。指標に関しても同様であり、この対応を通して $\mathrm{Irr}(G//H) \subset \mathrm{Irr}(G)$ と見ることにする。ただしここで一つ問題がある。$\mathrm{Irr}(G//H) \subset \mathrm{Irr}(G)$ と見て、同じ記号を使おうとするとその重複度が一致しなくては混乱を生じる。次に重複度が一致することを示す。

定理 4.6. H を (X, G) の正規閉部分集合とする。$\chi \in \mathrm{Irr}(G//H)$ に対して $\varphi(\sigma_g) := \frac{n_g}{n_{g^H}} \chi(\sigma_{g^H})$ と定めれば $\varphi \in \mathrm{Irr}(G)$ であり、また $m_\chi = m_\varphi$ が成り立つ。

証明. 重複度に関する主張以外は既に示した。

直交関係より

$$\frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \frac{1}{n_g} \varphi(\sigma_g) \varphi(\sigma_{g^*}) = \frac{\varphi(1)}{m_\varphi}, \qquad \frac{1}{n_{G//H}} \sum_{g^H \in G//H} \frac{1}{n_{g^H}} \chi(\sigma_{g^H}) \chi(\sigma_{(g^H)^*}) = \frac{\chi(1)}{m_\chi}$$

が成り立っている。$T \subset G$ を $G = \bigcup_{t \in T} HtH$ が分割となるような G の部分集合とする。このとき $g \in HtH$ ならば $g^H = t^H$ で $G//H = \{t^H \mid t \in T\}$ である。補題 3.11 より $\sum_{g \in HtH} n_g = n_{HtH} = n_H n_{t^H}$ であることに注意して

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \frac{1}{n_g} \varphi(\sigma_g) \varphi(\sigma_{g^*}) = \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \frac{{n_g}^2}{n_g (n_{g^H})^2} \chi(\sigma_{g^H}) \chi(\sigma_{(g^H)^*}) \\
= \;& \frac{1}{n_G} \sum_{t \in T} \left(\sum_{g \in HtH} n_g \right) \frac{1}{(n_{t^H})^2} \chi(\sigma_{t^H}) \chi(\sigma_{(t^H)^*}) = \frac{n_H}{n_G} \sum_{t \in T} \frac{1}{n_{t^H}} \chi(\sigma_{t^H}) \chi(\sigma_{(t^H)^*}) \\
= \;& \frac{1}{n_{G//H}} \sum_{t^H \in G//H} \frac{1}{n_{t^H}} \chi(\sigma_{t^H}) \chi(\sigma_{(t^H)^*}) = \frac{\chi(1)}{m_\chi}
\end{aligned}$$

である。$\chi(1) = \varphi(1)$ であるから $m_\chi = m_\varphi$ となる。 □

注意. H が正規閉部分集合でなくても定理 4.4 の対応で重複度は保たれることが分かっている。

この節の最後に既約指標が剰余スキームの指標になるための条件を与える。

定理 4.7. H を (X, G) の正規閉部分集合とする。$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して次は同値である。

(1) $\chi \in \mathrm{Irr}(G//H)$.

(2) 任意の $h \in H$ に対して $\chi(\sigma_h) = n_h \chi(1)$.

(3) $e_\chi e_H = e_H e_\chi \neq 0$.

証明. (1) $\Longrightarrow$ (2) を示す。$h \in H$ に対して $h^H = 1^H$ である。よって $\chi \in \mathrm{Irr}(G//H)$ ならば

$$\chi(\sigma_h) = \frac{n_h}{n_1}\chi(\sigma_{1^H}) = n_h \chi(1)$$

である。

(2) $\Longrightarrow$ (3) は次の式から分かる。

$$\chi(e_\chi e_H) = \chi(e_H) = \frac{1}{n_H}\sum_{h \in H}\chi(\sigma_h) = \frac{1}{n_H}\sum_{h \in H} n_h \chi(1) = \chi(1) \neq 0.$$

(3) $\Longrightarrow$ (1) を示す。e_H, e_χ は共に $\mathbb{C}G$ の中心的べき等元で e_χ は中心的原始べき等元である。よって $e_H e_\chi \neq 0$ ならば $e_H e_\chi = e_\chi$ が成り立つ。e_χ は $\mathbb{C}(G//H) \cong e_H \mathbb{C}G$ の中心的原始べき等元であり、対応する指標 χ は $\mathrm{Irr}(G//H)$ に含まれる。 $\square$

未解決問題 4.8. アソシエーションスキームの表現に関しても、有限群の表現における Frobenius 相互律に相当する定理は成り立つ。定理 4.7 は正規閉部分集合の自明な指標に関して Clifford の定理に相当する結果がほぼ成り立つことを意味している。一般に Clifford の定理がアソシエーションスキームに拡張できるかどうかは分かっていない。

5 指標と正規閉部分集合

定理 2.16 で G の指標 η に対して $|\eta(\sigma_g)| \leq n_g \eta(1)$ であることを示した。ここで $\eta(\sigma_g) = n_g \eta(1)$ となる場合を考えよう。

G の (既約とは限らない) 指標 η に対して

$$K(\eta) := \{g \in G \mid \eta(\sigma_g) = n_g \eta(1)\}$$

とおく。このとき次が成り立つ。

定理 5.1. 上の記号の下で $K(\eta)$ は G の閉部分集合である。

証明. T を指標 η を与える表現とする。定理 2.16 より $\eta(\sigma_g) = n_g \eta(1)$ であることは $T(\sigma_g)$ のすべての固有値が n_g であることと同値である。また定理 2.17 より n_g は σ_g の単根であり、$T(\sigma_g)$ の単根でもある。したがって $T(\sigma_g)$ はスカラー行列である。

$f, g \in K(\eta)$ とすると $\eta(\sigma_f \sigma_g) = n_f n_g \eta(1)$ であり、一方

$$\eta(\sigma_f \sigma_g) = \sum_{h \in G} p_{fg}^h \eta(\sigma_h) \leq \sum_{h \in G} p_{fg}^h |\eta(\sigma_h)| \leq \sum_{h \in G} p_{fg}^h n_h \eta(1)$$

である。$n_f n_g = \sum_{h \in G} p_{fg}^h n_h$ であるから $p_{fg}^h \neq 0$ ならば $\eta(\sigma_h) = n_h \eta(1)$、すなわち $h \in K(\eta)$ となる。 $\square$

さて、有限群の指標を知っていると $K(\eta)$ は正規閉部分集合ではないかと思われるだろう。しかし次の例を見ると、これは一般に成り立たない。

例 5.2. 次の関係行列で定義されるアソシエーションスキームを考える。

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 7 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 & 6 & 7 & 7 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 7 & 7 & 0 & 1 & 6 & 6 & 5 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 7 & 7 & 1 & 0 & 6 & 6 & 5 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 6 & 6 & 7 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 6 & 7 & 7 & 1 & 0 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 4 & 4 & 5 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 4 & 4 & 5 & 5 & 3 & 2 & 1 & 0 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 5 & 5 & 2 & 3 & 4 & 4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 5 & 5 & 3 & 2 & 4 & 4 & 7 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

指標表は以下の通りである。

	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	m_{χ_i}
χ_1	1	1	1	1	2	2	2	2	1
χ_2	1	1	-1	-1	-2	-2	2	2	1
χ_3	1	-1	-1	1	0	0	0	0	3
χ_4	1	-1	1	-1	0	0	0	0	3
χ_5	2	2	0	0	0	0	-2	-2	2

このとき $K(\chi_3) = \{g_0, g_3\}$ は正規閉部分集合ではない。

有限群ではこの事実を用いて指標表からすべての正規部分群を読み取ることができるが、同様のことはアソシエーションスキームでは出来ないのだろうか。以下でこの問題について考える。

命題 5.3. G の正規閉部分集合 H に対して、ある (既約とは限らない) 指標 η が存在して $K(\eta) = H$ である。

証明. $\eta = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G//H)} \chi$ とおくと、明らかに $K(\eta) = H$ である。 □

このことから、問題はどのような指標 η に対して $K(\eta) \lhd G$ となるかということになる。

$$I(\eta) := \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \mid \chi(\sigma_g) = n_g \chi(1), \text{for all } g \in K(\eta)\}$$

とおくと次の結果を得る。

定理 5.4. G の指標 η に対して $K(\eta) \lhd G$ であることと

$$\sum_{\chi \in I(\eta)} m_\chi \chi(1) = \frac{n_G}{n_{K(\eta)}}$$

が成り立つことは同値である。

証明. $H := K(\eta)$ とおく。$H \lhd G$ とすると $I(\eta) = \mathrm{Irr}(G//H)$ である。よって

$$\sum_{\chi \in I(\eta)} m_\chi \chi(1) = n_{G//H} = \frac{n_G}{n_H}$$

となる。

次に $\sum_{\chi \in I(\eta)} m_\chi \chi(1) = n_G / n_{K(\eta)}$ を仮定する。$\chi \in I(\eta)$ ならば

$$\chi(e_H) = \frac{1}{n_H} \sum_{h \in H} \chi(\sigma_h) = \frac{1}{n_H} \sum_{h \in H} n_h \chi(1) = \chi(1)$$

である。よって $e_H e_\chi = e_\chi$ が成り立つ。また

$$\begin{aligned} \gamma(e_H) &= \frac{n_G}{n_H}, \\ \gamma\left(\sum_{\chi \in I(\eta)} e_H e_\chi \right) &= \sum_{\chi \in I(\eta)} \gamma(e_\chi) = \sum_{\chi \in I(\eta)} m_\chi \chi(1) = \frac{n_G}{n_H} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで γ は標準指標である。$e_H = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} e_H e_\chi$ であり、$e_H e_\chi \neq 0$ ならば $\gamma(e_H e_\chi) > 0$ であることから $e_H = \sum_{\chi \in I(\eta)} e_\chi$ となり、特に e_H は中心的べき等元である。よって $H \lhd G$ である。 $\square$

指標の重複度は直交関係から計算できる。したがってこの結果から、指標表が与えられればすべての正規閉部分集合を求めることができる。

未解決問題 5.5. $H \lhd G$, $K \lhd G$ に対して $H \cap K \lhd G$ が一般に成り立つかどうかは分かっていないようである。元々この問題を考えるために $K(\eta)$ が常に正規閉部分集合になることを証明しようとしたが、反例が見つかってしまったのである。

6 群的スキーム

非可換な有限群は非可換なアソシエーションスキームを定義するが、そのようにして得られたアソシエーションスキームは一般の非可換アソシエーションスキームとくらべるととても良い性質を多く持っている。ここでは有限群と似た良い性質をもつアソシエーションスキームを考える。有限群の良い性質の一つに共役類をもつということがある。アソシエーションスキームに対して共役類を考えることは出来ないように思われるが、有限群の二つの元が共役であることと、任意の指標に対する値が等しいことは同値であるので、以下の一般化を考える。

(X, G) をアソシエーションスキームとする。$g, h \in G$ に対して $g \sim h$ であることを、任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して

$$\frac{1}{n_g} \chi(\sigma_g) = \frac{1}{n_h} \chi(\sigma_h)$$

であることで定める。明らかにこれは同値関係である。$g \in G$ を含む同値類の和集合を $\widetilde{g}$ で表す。$\widetilde{g}$ は $X \times X$ の部分集合であり、$\widetilde{G} := \{\widetilde{g} \mid g \in G\}$ とおけば、これは $X \times X$ の分割を与える。

$|\widetilde{G}| = |\mathrm{Irr}(G)|$ であるとき (X, G) を**群的スキーム** (group-like scheme) という。有限群に対しては関係 $\sim$ は共役という関係と同じで、したがって細スキーム (有限群) は常に群的である。

次の定理は群的スキームであることのいくつかの特徴付けを与えている。定理を述べるために一つ定義をする。型の等しい二つの行列、またはベクトル $M = (m_{ij}), N = (n_{ij})$ に対して、その対応する成分の積をとる演算 $M \circ N := (m_{ij} n_{ij})$ を考える。これを **アダマール積** (Hadamard product) と呼ぶ。また $Z(\mathbb{C}G)$ で $\mathbb{C}G$ の中心を表すこととする。$Z(\mathbb{C}G)$ は $\{e_\chi \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}$ を基底にもつ。

$$e_\chi = \frac{m_\chi}{n_G} \sum_{g \in G} \frac{1}{n_g} \overline{\chi(\sigma_g)} \sigma_g$$

であるから $Z(\mathbb{C}G) \subseteq \mathbb{C}\widetilde{G}$ は常に成り立つ。

定理 6.1. アソシエーションスキーム (X, G) に対して次は同値である。

(1) $Z(\mathbb{C}G) = \mathbb{C}\widetilde{G}$.

(2) $\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathbb{C}G) = |\widetilde{G}|$. (すなわち (X, G) が群的であること。)

(3) ある G の分割 T があって $t \in T$ に対して $\sigma_t := \sum_{f \in t} \sigma_f$ とおくと $Z(\mathbb{C}G) = \bigoplus_{t \in T} \mathbb{C}\sigma_t$ となる。

(4) $Z(\mathbb{C}G)$ はアダマール積で閉じている。

証明のために一つの補題を用意する。ベクトルが基本的であるとは、その一つの成分が 1 で、他の成分はすべて 0 であることとする。また行列 M に対して、その i 番目の行ベクトルを M_{i*} で表し、その j 番目の列ベクトルを M_{*j} と表すことにする。

補題 6.2. M を階数 m の $m \times n$ 行列とし、どの列ベクトルも零ベクトルではないとする。更に M の二つの行ベクトルのアダマール積は、M の行ベクトルたちの一次結合で書けるとする。このときある m 次正則行列 L があって LM のすべての列ベクトルは基本的になる。

証明. M のはじめの m 列が一次独立であると仮定してよい。よって $M = (M_0|M_1)$ とし M_0 を正則行列とする。$L = M_0^{-1}$ とおく。$LM = (I_m|LM_1)$ である。LM の各列が基本的であることをいえばよい。このとき LM の行ベクトルのアダマール積も LM の行ベクトルたちの一次結合で書けることに注意しておく。

$(LM)_{ij} \neq 0$, $(LM)_{i'j} \neq 0$ とすると $(LM)_{i*} \circ (LM)_{i'*}$ は LM の行ベクトルの一次結合では書けない。$(LM)_{ij} \neq 0$, $(LM)_{ij} \neq 1$ とすると $(LM)_{i*} \circ (LM)_{i*}$ は LM の行ベクトルの一次結合では書けない。よって LM の列ベクトルは基本的である。 □

定理 6.1 の証明. (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) は明らかである。(4) を仮定して (1) を示す。

$a = \sum_{g\in G} a_g\sigma_g$ から行ベクトル $(a_g \mid g \in G)$ への対応を考える。もちろんこれは全単射であるから、これを同一視する。行と列がそれぞれ $\mathrm{Irr}(G)$ と G で添字付けられた行列 $M = (n_g^{-1}\chi(\sigma_{g^*}))_{\chi,g}$ を考える。このとき行ベクトル $M_{\chi*}$ は $n_G m_\chi^{-1} e_\chi$ に対応する。よって M の行ベクトルの全体は $Z(\mathbb{C}G)$ の基底である。(4) を仮定しているので、この行列 M は補題 6.2 の条件を満たす。よってある正則行列 L があって LM の各列は基本的となる。$1 \le i \le |\mathrm{Irr}(G)|$ に対して

$$U_i := \{g \in G \mid (LM)_{i,g} = 1\}$$

とおくと LM の性質から $G = \bigcup_{i=1}^{|\mathrm{Irr}(G)|} U_i$ は G の分割となる。

$f, g \in G$ が同じ U_i に含まれるための必要十分条件は $(LM)_{*f} = (LM)_{*g}$ であることで、更にこれは $M_{*f} = M_{*g}$ であることと同値である。よって U_i は $\sim$ 同値類であり、(1) が成り立つ。 □

定理 6.3. (X, G) を群的スキームとすると、$(X, \widetilde{G})$ は可換アソシエーションスキームである。

証明. $\mathbb{C}\widetilde{G} = Z(\mathbb{C}G)$ だから $\mathbb{C}\widetilde{G}$ は積で閉じていて、更に可換である。他の条件は明らか。 □

例 6.4. (X, G) を有限群 $\mathcal{G}$ で定義される細スキームとする。このとき $(X, \widetilde{G})$ は $\mathcal{G}$ で定義される群アソシエーションスキームである。

定理 6.5. (X, G) を群的スキームとすると、任意の指標 η に対して $K(\eta) \lhd G$ である。特に $H \lhd G$, $K \lhd G$ ならば $H \cap K \lhd G$ である。

証明. $K(\eta)$ はいくつかの $\sim$ 同値類の和集合であるから $\sigma_{K(\eta)}$ は $\mathbb{C}G$ の中心に含まれる。よって $K(\eta) \lhd G$ である。 □

群的スキーム (X, G) の指標表は可換アソシエーションスキーム $(X, \widetilde{G})$ の指標表から容易に求めることができる。これを利用して次の結果を得る。

定理 6.6 (群的スキームの第二直交関係). (X, G) を群的スキームとする。このとき

$$\frac{n_{\widetilde{g}}}{n_G n_f n_g} \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \frac{m_\chi}{\chi(1)} \chi(\sigma_f)\chi(\sigma_{g^*}) = \delta_{\widetilde{f}\widetilde{g}}.$$

証明. $\mathbb{C}G$ と $\mathbb{C}\widetilde{G} = Z(\mathbb{C}G)$ の中心的べき等分解は一致するから、$\mathrm{Irr}(G)$ と $\mathrm{Irr}(\widetilde{G})$ の間には自然な全単射 $\chi \mapsto \widetilde{\chi}$ がある。指標の値については

$$\frac{\chi(\sigma_g)}{n_g\chi(1)} = \frac{\widetilde{\chi}(\sigma_{\widetilde{g}})}{n_{\widetilde{g}}}$$

が成り立つ。重複度 m_χ は $\mathrm{rank}(e_\chi/\chi(1))$ で与えられ、$e_\chi = e_{\widetilde{\chi}}$, $\widetilde{\chi}(1) = 1$ より $m_{\widetilde{\chi}} = m_\chi\chi(1)$ が成り立つ。これを可換アソシエーションスキームの第二直交関係に代入すれば結果が成り立つ。 □

注意. 与えられたアソシエーションスキームが群的であるかどうかは、指標表、または隣接代数の中心を求めなければ判定することができない。計算機などを利用してそれを判定するには $\{\sum_{f\in G} n_f^{-1}\sigma_{f^*}\sigma_g\sigma_f \mid g \in G\}$ がベクトル空間として $Z(\mathbb{C}G)$ を生成することを利用し、$Z(\mathbb{C}G)$ がアダマール積で閉じていることを確認すればよい。

7 可換アソシエーションスキームと双対隣接代数

ここでは可換アソシエーションスキームとその双対隣接代数について簡単に解説する。よく知られた理論なので証明などはしない。

アソシエーションスキーム (X, G) の隣接代数 $\mathbb{C}G$ は行列のアダマール積で閉じていて、この積に関しても $\mathbb{C}$-代数になる。これを (X, G) の**双対隣接代数** (dual adjacency algebra) という。一般の (可換を仮定しない) アソシエーションスキームでは双対隣接代数を考えても、今のところよい結果は知られていないように思うが、可換の場合には様々な結果が知られている。

以下、この節では可換アソシエーションスキームのみを考える。

可換アソシエーションスキーム (X, G) に対して、その隣接代数 $\mathbb{C}G$ は $\mathbb{C}$ のいくつかの直和に同型であり、よって $\{e_\chi \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}$ は $\mathbb{C}G$ の基底になる。二つの基底 $\{\sigma_g \mid g \in G\}$ と $\{e_\chi \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}$ の変換を考える。

$$\begin{aligned} e_\chi &= \frac{1}{n_G}\sum_{g\in G} q_\chi(g)\sigma_g, \\ \sigma_g &= \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} p_g(\chi)e_\chi. \end{aligned}$$

このとき、これまでの議論から

$$p_g(\chi) = \chi(\sigma_g), \quad q_\chi(g) = \frac{m_\chi}{n_g}\overline{\chi(\sigma_g)}$$

である。

$$P := (p_g(\chi))_{\chi,g}, \quad Q := (q_\chi(g))_{g,\chi}$$

とおけば $PQ = QP = n_G I$ である。隣接代数において、基底 $\{\sigma_g \mid g \in G\}$ の積は

$$\sigma_f\sigma_g = \sum_{h\in G} p_{fg}^h \sigma_h$$

で与えられた。これと双対的に、基底 $\{e_\chi \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}$ のアダマール積を

$$e_\chi \circ e_\varphi = \frac{1}{n_G}\sum_{\xi\in\mathrm{Irr}(G)} q_{\chi\varphi}^\xi e_\xi$$

とする。$q_{\chi\varphi}^\xi$ を **Krein parameter** と呼ぶ。Krein parameter と重複度 m_χ に関して、交叉数 p_{fg}^h と分岐指数 n_g に関する公式 (命題 1.17) と同様の式が成り立つ。また、以下の結果が知られている。

命題 7.1. 可換アソシエーションスキームに対して次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
p_{fg}^h &= \frac{n_f n_g}{n_G} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \frac{1}{m_\chi^2} q_\chi(f) q_\chi(g) \overline{q_\chi(h)} \\
q_{\chi\varphi}^\xi &= \frac{m_\chi m_\varphi}{n_G} \sum_{g \in G} \frac{1}{n_g^2} p_g(\chi) p_g(\varphi) \overline{p_g(\xi)}.
\end{aligned}
$$

定理 7.2 (Krein Condition). $q_{\chi\varphi}^\xi$ は非負実数である。

8 指標の積

有限群の指標理論において、二つの指標の積がまた指標になるという事実は重要である。同様のことをアソシエーションスキームについて考えても、指標の積は一般には指標にならない。しかし、ある強い仮定の下では、これが成り立つことをこの節で示す。

(X, G) を細スキーム (有限群) とする。G の (既約とは限らない) 二つの指標 χ, φ に対して $\chi\varphi(\sigma_g) := \chi(\sigma_g)\varphi(\sigma_g)$ で積を定めれば、これはまた指標になる。その理由は、余積 $\Delta : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G \otimes \mathbb{C}G$ ($\sigma_g \mapsto \sigma_g \otimes \sigma_g$) が代数準同型であることによる (テンソルはすべて $\mathbb{C}$ 上で考える)。実際には $\mathbb{C}G$ はもっと強く Hopf 代数であることが分かる。

一般のアソシエーションスキームの隣接代数に自然に Hopf 代数の構造を入れることは出来ない。しかし、以下のように余単位元が代数準同型であるような余代数の構造を入れることができる。**余単位元** (counit) $\varepsilon : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}$ を $\varepsilon(\sigma_g) := n_g$ で定めると、これは代数準同型である。また**余積** (comultiplication) $\Delta : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G \otimes \mathbb{C}G$ を $\sigma_g \mapsto \frac{1}{n_g}\sigma_g \otimes \sigma_g$ で定めると $(\mathbb{C}G, \Delta, \varepsilon)$ は**余代数** (coalgebra) となる。

注意. 代数かつ余代数で、余単位元、余積が共に代数準同型であるとき、それを**双代数** (bialgebra) という。さらに**対合射** (antipode) をもつとき **Hopf 代数** (Hopf algebra) という。

アソシエーションスキームの隣接代数に上のように余代数構造を入れても、余積が代数準同型にならないため、それは双代数にはならない。そこで細剰余 $\mathbf{O}^\theta(G)$ による剰余スキームを考える。記号を簡単にするためにこの節では $H := \mathbf{O}^\theta(G)$ とおく。

$$\Delta' : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}(G/\!/H) \otimes \mathbb{C}G, \quad \sigma_g \mapsto \sigma_{g^H} \otimes \sigma_g$$

を考える。これは余積 Δ と自然な準同型 $\pi : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}(G/\!/H)$ によって $\Delta' = (\pi \otimes 1) \circ \Delta$ と表されるものである。このとき次が成り立つ。

補題 8.1. Δ' は代数準同型である。

証明. 線形性は明らかなので、積が保存されることを示す。

$$
\begin{aligned}
\Delta'(\sigma_f \sigma_g) &= \sum_{h \in G} p_{fg}^h \Delta'(\sigma_h) = \sum_{h \in G} p_{fg}^h \sigma_{h^H} \otimes \sigma_h, \\
\Delta'(\sigma_f)\Delta'(\sigma_g) &= (\sigma_{f^H} \otimes \sigma_f)(\sigma_{g^H} \otimes \sigma_g) = \sum_{h \in G} p_{fg}^h \sigma_{(f^H g^H)} \otimes \sigma_h
\end{aligned}
$$

であるが $G/\!/H$ が細スキームであるから $p_{fg}^h \neq 0$ ならば $f^H g^H = h^H$ が成り立つ。よってこの二つの式は等しい。 □

次の補題は明らかである。

補題 8.2. S を $G//H$ の d_S 次の表現、T を G の d_T 次の表現とすると $(S \otimes T) \circ \Delta'$ は G の $d_S d_T$ 次の表現である。また χ_S, χ_T をそれぞれ S, T の指標とすると $(S \otimes T) \circ \Delta'$ の指標は $\sigma_g \mapsto \chi_S(\sigma_{g^H})\chi_T(\sigma_g) = n_g^{-1}\chi_S(\sigma_g)\chi_T(\sigma_g)$ で与えられる。

この補題を既約指標に対して書き直すと次のようになる。

定理 8.3. $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ と $\varphi \in \mathrm{Irr}(G//\mathbf{O}^\theta(G))$ に対して $\chi\varphi(\sigma_g) = n_g^{-1}\chi(\sigma_g)\varphi(\sigma_g)$ で指標の積を定めれば $\chi\varphi$ は G の指標である。($\chi\varphi$ の既約分解における係数は Krein parameter を少し変形したものに等しい。)

有限群の既約指標の積に関しては、その一方が一次の指標であれば積はまた既約になる。これに対してアソシエーションスキームでは次が成り立つ。

定理 8.4. $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ と $\varphi \in \mathrm{Irr}(G//\mathbf{O}^\theta(G))$, $\varphi(1) = 1$ に対して $\chi\varphi \in \mathrm{Irr}(G)$ である。またこのとき $\chi\varphi$ の重複度は χ の重複度に等しい。

証明. 補題 8.2 の記号を使う。また $H = \mathbf{O}^\theta(G)$ とする。$\varphi(1) = 1$ なので $d_S = 1$ である。表現 $(S \otimes T) \circ \Delta' : \mathbb{C}G \to M_{d_T}$ が既約であることを示すには、これが全射であることをいえばよい。$A \in M_{d_T}$ を任意に取る。T は既約なので全射である。よってある $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g \sigma_g \in \mathbb{C}G$ があって $A = T(\alpha)$ である。φ は (本質的に) 有限群の線形指標であるから、任意の $g \in G$ に対して $\varphi(\sigma_{g^H}) = S(\sigma_{g^H}) \neq 0$ である。$\beta = \sum_{g \in G} S(\sigma_{g^H})^{-1}\alpha_g\sigma_g$ とおけば

$$(S \otimes T) \circ \Delta'(\beta) = \sum_{g \in G} S(\sigma_{g^H})^{-1}\alpha_g S(\sigma_{g^H}) \otimes T(\sigma_g) = 1 \otimes T(\alpha) = A$$

である。

重複度については

$$\begin{aligned}
\frac{\chi\varphi(1)}{m_{\chi\varphi}} &= \frac{1}{n_G}\sum_{g \in G}\frac{1}{n_g}\chi\varphi(\sigma_g)\chi\varphi(\sigma_{g^*}) = \frac{1}{n_G}\sum_{g \in G}\frac{1}{{n_g}^3}\chi(\sigma_g)\chi(\sigma_{g^*})\varphi(\sigma_g)\varphi(\sigma_{g^*}) \\
&= \frac{1}{n_G}\sum_{g \in G}\frac{1}{{n_g}^3}\frac{{n_g}^2}{{n_{g^H}}^2}\chi(\sigma_g)\chi(\sigma_g)\varphi(\sigma_{g^H})\varphi(\sigma_{(g^H)^*}) \\
&= \frac{1}{n_G}\sum_{g \in G}\frac{1}{n_g}\chi(\sigma_g)\chi(\sigma_{g^*}) = \frac{\chi(1)}{m_\chi}.
\end{aligned}$$

であることと $\chi\varphi(1) = \chi(1)$ よりわかる。 □

注意. $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, $\varphi \in \mathrm{Irr}(G//\mathbf{O}^\theta(G))$, $\chi(1) = 1$ であっても $\chi\varphi$ が既約になるとは限らない。

これらの結果を利用するためには $\mathrm{Irr}(G//\mathbf{O}^\theta(G))$ を特徴付けることが重要である。これについては今のところ十分な結果は得られていないが、部分的な結果を以下に示す。

命題 8.5. $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して $\chi(1) \le m_\chi$ が成り立つ。

証明. $x \in X$ を一つ固定する。写像 $T : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}X$ を $T(\sigma_g) = x\sigma_g (= \sum_{y \in xg} y)$ で定めれば、これは右 $\mathbb{C}G$-単準同型である。正則表現と標準表現における $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ の重複度が、それぞれ $\chi(1), m_\chi$ であるから $\chi(1) \le m_\chi$ である。 $\square$

$G//\mathbf{O}^\theta(G)$ は先に述べたように有限群と思うことができる。その交換子群の逆像を $D(G)$ とする。すなわち $D(G)$ は剰余スキームがアーベル群となるような閉部分集合のうち最小のものである。このとき次が成り立つ。

定理 8.6. $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して $m_\chi = 1$ であることと $\chi \in \mathrm{Irr}(G//D(G))$ であることは同値である。

証明. $\chi \in \mathrm{Irr}(G//D(G))$ ならば χ はアーベル群の指標と思うことができて $m_\chi = \chi(1) = 1$ である。

逆に $m_\chi = 1$ と仮定する。このとき $\chi(1) = 1$ であり、直交関係などから

$$n_G = \sum_{g \in G} \frac{1}{n_g} \chi(\sigma_g)\chi(\sigma_{g^*}) \le \sum_{g \in G} \frac{1}{n_g} |\chi(\sigma_g)| \cdot |\chi(\sigma_{g^*})| \le \sum_{g \in G} n_g = n_G$$

が成り立つ。よって $g \in G$ に対して、ある $\varepsilon_g \in \mathbb{C}, |\varepsilon_g| = 1$ があって $\chi(\sigma_g) = n_g \varepsilon_g$ である。またこのとき $\chi(\sigma_{g^*}) = n_g \varepsilon_g^{-1}$ である。

$f, g \in G$ に対して $\sigma_f \sigma_g = \sum_{h \in G} p_{fg}^h \sigma_h$ の χ による値を考える。

$$\begin{aligned} \chi(\sigma_f \sigma_g) &= \chi(\sigma_f)\chi(\sigma_g) = n_f n_g \varepsilon_f \varepsilon_g, \\ \chi(\sigma_f \sigma_g) &= \sum_{h \in G} p_{fg}^h \chi(\sigma_h) = \sum_{h \in fg} p_{fg}^h n_h \varepsilon_h. \end{aligned}$$

$\sum_{h \in fg} p_{fg}^h n_h = \sum_{h \in G} p_{fg}^h n_h = n_f n_g$ であるから任意の $h \in fg$ に対して ε_h は一定である。特に $h \in gg^*$ とすると $1 \in gg^*$ かつ $\varepsilon_1 = 1$ より $\varepsilon_h = 1$ である。よってこのとき $\chi(\sigma_h) = n_h$ となり、任意の $k \in \langle gg^* \mid g \in G \rangle = \mathbf{O}^\vartheta(G)$ に対して $\chi(\sigma_k) = n_k$ となる。よって $\chi \in \mathrm{Irr}(G//\mathbf{O}^\vartheta(G))$ であるが、$\chi(1) = 1$ より $\chi \in \mathrm{Irr}(G//D(G))$ である。 $\square$

$\varphi \in \mathrm{Irr}(G//D(G))$ であることは $\varphi \in \mathrm{Irr}(G//\mathbf{O}^\theta(G))$ かつ $\varphi(1) = 1$ であることと同値であるから、この結果は $\varphi \in \mathrm{Irr}(G//\mathbf{O}^\theta(G))$ の特徴付けの部分的な結果となっている。また G が可換の場合は $D(G) = \mathbf{O}^\theta(G)$ であり、これによって $\varphi \in \mathrm{Irr}(G//\mathbf{O}^\theta(G))$ は完全に特徴付けられる。一般の場合には次を予想しているが証明はできていない。

未解決問題 8.7. $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して $\chi \in \mathrm{Irr}(G//\mathbf{O}^\vartheta(G))$ ならば $\chi(1) = m_\chi$ である。逆に $\chi(1) = m_\chi$ とすると $\chi \in \mathrm{Irr}(G//\mathbf{O}^\vartheta(G))$ となるか考えよ。(G が可換の場合は定理 8.6 より正しい。また G が可移置換群から得られるアソシエーションスキーム (例 1.4) である場合には吉川昌慶により正しいことが示されている。)

9　一つの問題 (Frobenius-Schur の定理の拡張)

アソシエーションスキームの細剰余の指標理論的な特徴付けをもう一つ与えよう。(可換とは限らない) G の右正則表現の指標を考える。すなわち

$$\xi := \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)\chi$$

を考える。一方で右正則表現は $\sigma_g \mapsto (p_{fg}^h)_{fh}$ で与えられるから

$$\xi(\sigma_g) = \sum_{f \in G} p_{fg}^f = \sum_{f \in G} \frac{n_g}{n_f} p_{f^*f}^g$$

である。よって $\frac{n_g}{n_h} p_{f^*f}^g \geq 0$ であることから $\xi(\sigma_g) \neq 0$ であることと $g \in \bigcup_{f \in G} f^*f$ であることは同値である。$\mathbf{O}^\vartheta(G) = \left\langle \bigcup_{f \in G} f^*f \right\rangle$ であるから次の結果を得る。

定理 9.1. $\mathbf{O}^\vartheta(G)$ は $\{g \in G \mid \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)\chi(\sigma_g) \neq 0\}$ を含む最小の (正規) 閉部分集合である。

未解決問題 9.2. 上の事実を少し変形して考える。$\theta(\sigma_g) := \sum_{f \in G} \frac{n_g}{n_f} p_{ff}^g$ とおく。

(1) θ は指標の一次結合で書けるかを考えよ。

(2) θ が指標の一次結合で書けたとするとき、各既約成分 χ の重複度を求めよ。

これは有限群の指標に関する Frobenius-Schur の定理に相当する。G が可換ならば (1) は正しく、$\chi(1) = 1$ であれば、$\chi = \overline{\chi}$ のとき重複度 1 で、$\chi \neq \overline{\chi}$ のとき重複度 0 であることが、直交関係からすぐに分かる。

この問題を考えるには次の命題が有用であるように思われる。

命題 9.3. $\mathbb{C}$-線形写像 $\varphi : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}$ が指標の一次結合で書けるための必要十分条件は、任意の $f, g \in G$ に対して $\varphi(\sigma_f\sigma_g) = \varphi(\sigma_g\sigma_f)$ が成り立つことである。

証明. $[\mathbb{C}G, \mathbb{C}G] := \langle ab - ba \mid a, b \in \mathbb{C}G \rangle_{\mathbb{C}}$ とおく。$[\mathbb{C}G, \mathbb{C}G]$ はベクトル空間として $\{\sigma_f\sigma_g - \sigma_g\sigma_f \mid f, g \in G\}$ で生成される。またベクトル空間として $\mathbb{C}G = Z(\mathbb{C}G) \oplus [\mathbb{C}G, \mathbb{C}G]$ が成り立つ。

指標の一次結合で書ける線形写像全体のなすベクトル空間を $\mathbb{C}\mathrm{Irr}(G)$ と書くことにする。任意の $\chi \in \mathbb{C}\mathrm{Irr}(G)$ に対して $\chi([\mathbb{C}G, \mathbb{C}G]) = 0$ であることは明らかである。$\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathbb{C}G) = |\mathrm{Irr}(G)| = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\mathrm{Irr}(G)$ であるから主張は成り立つ。 □

上で定義した θ が指標の一次結合で書けたとすると、直交関係から $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ の θ における重複度は

$$\nu(\chi) := \frac{m_\chi}{n_G \chi(1)} \sum_{g \in G} \frac{1}{n_g} \chi({\sigma_g}^2)$$

となる。有限群の既約指標 χ について $\nu(\chi) \in \{-1, 0, 1\}$ となるというのが Frobenius-Schur の定理であり、同様のことがアソシエーションスキームの指標についていえないかというのが上の問題である。具体例では、位数 30 以下のすべてのアソシエーションスキームについて θ は指標の一次結合で書ける。$\nu(\chi)$ の値を調べるのはそれほど容易ではない。

Appendix

(1) 未解決問題 8.7 は [6, Theorem 2.8] で既に示されていた。

(2) 未解決問題 5.5 について、二つの正規閉部分集合の共通部分が正規閉部分集合にならない例が吉川昌慶によって見つけられた。

References

[1] E. Bannai, T. Ito, Algebraic Combinatorics I : Association Schemes, Benjamin–Cummings, Menlo Park CA, 1984.

[2] Yu. A. Drozd, V. V. Kirichenko, Finite Dimensional Algebras, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1994.

[3] L. C. Grove, Groups and Characters, Wiley-Interscience, New York, 1997.

[4] 岩堀 長慶, 線形代数学, 裳華房, 1982.

[5] A. Hanaki, I. Miyamoto, Classification of association schemes with small vertices, http://kissme.shinshu-u.ac.jp/as/.

[6] M. Hirasaka, M. Muzychuk, Association schemes generated by a non-symmetric relation of valency 2, Disc. Math. **244** (2002) 109–135.

[7] P.-H. Zieschang, An Algebraic Approach to Association Schemes, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1996 (LNM 1628).

千葉大学大学院・集中講義 2003/9/29 – 10/3
九州大学大学院・集中講義 2004/1/19 – 1/23
(revised 2004/2/6)
(revised 2004/5/20)
(revised 2004/8/13)
(revised 2004/9/22)