体論・筆答レポート (第一回 2015/12/07)

1. 以下の事項が正しいかどうかを正 (◯)、誤 ($\times$) で答えよ (説明は不要)。[20 点満点：1 問不正解毎に -3 点、ただし 0 点以下にはしない]

   (1) 体の (単位元を共有する) 部分環は整域である。

   (2) 実数すべての集合 $\mathbb{R}$ は通常の演算で体である。

   (3) α を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上超越的数とする。このとき $\{f(\alpha) \mid f(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$ は体である。

   (4) $K \subset M \subset L$ を体の列とする。L/M と M/K が正規拡大であるならば L/K も正規拡大である。

   (5) $K \subset M \subset L$ を体の列とする。L/M と M/K が分離拡大であるならば L/K も分離拡大である。

   (6) L/K を体の拡大とし Ω を L における K の代数的閉包とする。このとき、次数が 1 以上の任意の $f(x) \in K[x]$ は Ω に根をもつ。

   (7) $\overline{K}$ を体 K の代数的閉包とし、L を $\overline{K}/K$ の中間体とする。このとき $\overline{K}$ は L の代数的閉包である。

   (8) 代数的閉体を含む体は代数的閉体である。

   (9) 標数が素数 p である体は有限体である。

   (10) K, L を体とする。K の L の中への同型は K から L への全単射である。

2. 次の問いに答えよ。[5 点 $\times$ 4]

   (1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ。

   (2) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ の $\mathbb{Q}$ 上 (ベクトル空間として) の基底を求めよ。

   (3) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ であることを示せ。

   (4) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ の $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$ を求めよ。

3. $K \subset M \subset L$ を体の列とする。$[L : M] < \infty$, $[M : K] < \infty$ とし $\{v_1, \cdots, v_m\}$ を L の M 上 (ベクトル空間として) の基底、$\{w_1, \cdots, w_n\}$ を M の K 上 (ベクトル空間として) の基底とする。[5 点 $\times$ 2]

   (1) $\{v_i w_j \mid 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$ は K 上一次独立であることを示せ。

   (2) L は K 上 $\{v_i w_j \mid 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$ で生成される (張られる) ことを示せ。

4. 元の数が 4 個である体を具体的に構成せよ。[5 点]

5. K を体とする。$0 \neq f(x) \in K[x]$ について、$f(x)$ が (K の代数的閉包 $\overline{K}$ において) 重根をもつことと、$f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ が ($\overline{K}$ において) 共通根をもつことは同値である。これを示せ。[5 点]

[20 点 + 5 点 $\times$ 8 = 60 点満点]