

## 体論・筆答レポート (第一回 2016/11/17)

1. 次の事項の定義を書け。[3点 × 5]

- (1)  $L/K$  を体の拡大とすると、 $\alpha \in L$  が  $K$  上代数的であること。
- (2)  $L/K$  を体の拡大、 $\alpha \in L$  は  $K$  上代数的であるとするとき、 $\alpha$  の  $K$  上の最小多項式。
- (3)  $L/K$  を体の拡大とすると、 $L$  における  $K$  の代数的閉包。
- (4) 体  $K$  が代数的閉体であること。
- (5) 体の拡大  $L/K$  が正規拡大であること。

2. 次の問に答えよ。[5点 × 5]

- (1)  $\sqrt{2} + \sqrt{6}$  の  $\mathbb{Q}$  上の最小多項式を求めよ。
- (2)  $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  を示せ。(  $\sqrt{3}$  は  $\sqrt{6}$  の書き間違いではない。 )
- (3)  $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$  の  $\mathbb{Q}$  上の基底を求めよ。
- (4)  $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$  の  $\mathbb{Q}$ -自己同型群  $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{6})/\mathbb{Q})$  を求めよ。
- (5)  $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$  の  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ -自己同型群  $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{6})/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$  を求めよ。

3. 体の拡大  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \omega\sqrt[3]{3})/\mathbb{Q}$  の拡大次数を求めよ。ただし  $\omega$  は ( $\mathbb{C}$  における) 1 の原始 3 乗根とする。(答のみではなくその理由も書くこと。)[5点]

4. 一般に  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  に対して  $\mathbb{Q}(\alpha + \beta) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$  が正しいかどうかを答え、正しいければ証明し、正しくないならば成り立たないような例をあげよ。[5点]

5.  $L/K$  を体の正規拡大とする。  $M$  を  $L/K$  の中間体とすると、  $L/M$  も正規拡大であることを示せ。[5点]

6.  $K$  を標数 0 の体とする。  $K$  上の既約多項式  $p(x)$  は分離的であることを示せ。[5点]

[3点 × 5 + 5点 × 9 = 60点満点]