

体論・筆答レポート (第一回 2016/11/17)

1. 次の事項の定義を書け。[3点 × 5]

- (1) L/K を体の拡大とすると、 $\alpha \in L$ が K 上代数的であること。
- (2) L/K を体の拡大、 $\alpha \in L$ は K 上代数的であるとするとき、 α の K 上の最小多項式。
- (3) L/K を体の拡大とすると、 L における K の代数的閉包。
- (4) 体 K が代数的閉体であること。
- (5) 体の拡大 L/K が正規拡大であること。

2. 次の問に答えよ。[5点 × 5]

- (1) $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ の \mathbb{Q} 上の最小多項式を求めよ。
 - (2) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ を示せ。($\sqrt{3}$ は $\sqrt{6}$ の書き間違いではない。)
 - (3) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ の \mathbb{Q} 上の基底を求めよ。
 - (4) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ の \mathbb{Q} -自己同型群 $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{6})/\mathbb{Q})$ を求めよ。
 - (5) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ の $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ -自己同型群 $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{6})/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$ を求めよ。
3. 体の拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \omega\sqrt[3]{3})/\mathbb{Q}$ の拡大次数を求めよ。ただし ω は (\mathbb{C} における) 1 の原始 3 乗根とする。(答のみではなくその理由も書くこと。)[5点]
4. 一般に $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して $\mathbb{Q}(\alpha + \beta) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ が正しいかどうかを答え、正しいければ証明し、正しくないならば成り立たないような例をあげよ。[5点]
5. L/K を体の正規拡大とする。 M を L/K の中間体とすると、 L/M も正規拡大であることを示せ。[5点]
6. K を標数 0 の体とする。 K 上の既約多項式 $p(x)$ は分離的であることを示せ。[5点]

[3点 × 5 + 5点 × 9 = 60点満点]