体論・筆答レポート (第二回 2017/01/26, 改)

1. 以下の事項が正しいかどうかを正 (◯)、誤 ($\times$) で答えよ (説明は不要)。
[20 点満点：1 問不正解毎に -3 点、ただし 0 点未満にはしない]

   (1) L/K を体の有限次拡大とし M をその中間体とする。L/M の拡大次数を ℓ、M/K の拡大次数を m とすると L/K の拡大次数は ℓm である。

   (2) L/K を体の有限次拡大とし M, N をその中間体とする。合成体 MN は $MN = \{ab \mid a \in M,\ b \in N\}$ と表される。

   (3) L/K を体の有限次拡大とし M, N をその中間体とする。M/K の拡大次数を ℓ、N/K の拡大次数を m とする。合成体 MN について MN/K の拡大次数は ℓm である。

   (4) K を体とする。$0 \neq f(x) \in K[x]$ を n 次の多項式とし、α を $f(x)$ の一つの根とする。このとき体の拡大 $K(\alpha)/K$ の拡大次数は n である。

   (5) L/K を体の拡大とし、$f(x) \in K[x]$ を既約多項式とする。$f(x)$ が L に一つの根をもてば、$f(x)$ は $L[x]$ で一次式の積に分解する。

   (6) K を体とし、$f(x) \in K[x]$ を既約多項式とする。このとき $f(x)$ は重根をもたない。

   (7) 複素数体 $\mathbb{C}$ は実数体 $\mathbb{R}$ の代数的閉包である。

   (8) ちょうど n 個の元をもつ有限体は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と環として同型である。

   (9) 有限体の有限次拡大はガロア拡大である。

   (10) n を自然数とする。有理数体 $\mathbb{Q}$ に $\mathbb{C}$ における 1 の原始 n 乗根 ε を添加した体 $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ は $\mathbb{Q}$ のガロア拡大である。

2. $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ の最小分解体を L とする。[5 点 $\times$ 4]

   (1) 体の拡大 $L/\mathbb{Q}$ の拡大次数を答えよ。

   (2) 体のガロア拡大 $L/\mathbb{Q}$ のガロア群とその部分群をすべて求めよ。

   (3) (2) で求めたそれぞれの部分群に対して、それに対応する不変体を求めよ。

   (4) $L/\mathbb{Q}$ の中間体 M で $M/\mathbb{Q}$ がガロア拡大となるものをすべて答えよ。

3. 16 元体 $\mathbb{F}_{16}$ を考える。[5 点 $\times$ 2]

   (1) $\mathbb{F}_{16}/\mathbb{F}_2$ の中間体をすべて求めよ。

   (2) ガロア群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{16}/\mathbb{F}_2)$ を決定せよ。(元を写像として表すと共に群としての構造も決定せよ。)

4. ε を $\mathbb{C}$ における 1 の原始 12 乗根とする。ガロア群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon)/\mathbb{Q})$ の構造をいくつかの巡回群の直積として表わせ。($C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_r}$ の形で表わせ。) [5 点]

5. L/K を有限次ガロア拡大とし、そのガロア群を G とする。M を L/K の中間体とし、M/K がガロア拡大であるとする。このとき M の不変部分群 G^M は G の正規部分群であることを示せ。ただし G^M が G の部分群であることは既知としてよい。[5 点]

[20 点 + 5 点 $\times$ 8 = 60 点満点]