

## 体論・筆答レポート (第一回 2017/11/16)

1.  $L/K$  を体の拡大とする。[5 点 × 2]
  - (1)  $L/K$  が有限次拡大であることと、代数的拡大であることの定義を書け。
  - (2) 有限次拡大は代数的拡大であることを示せ。
2. 次の問に答えよ。[5 点 × 5]
  - (1)  $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$  の  $\mathbb{Q}$  上の最小多項式を求めよ。
  - (2)  $\mathbb{Q}(2\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  を示せ。
  - (3)  $\mathbb{Q}(2\sqrt{3} - \sqrt{3})$  の  $\mathbb{Q}$  上の一組の基底を求めよ。
  - (4)  $\mathbb{Q}(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$  の  $\mathbb{Q}$ -自己同型群  $\text{Aut}(\mathbb{Q}(2\sqrt{2} - \sqrt{3})/\mathbb{Q})$  を求めよ。
  - (5)  $\mathbb{Q}(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$  の  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ -自己同型群  $\text{Aut}(\mathbb{Q}(2\sqrt{2} - \sqrt{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{3}))$  を求めよ。
3. 次の体の拡大のうち、正規拡大であるものをすべて答えよ。ただし、ここで  $\omega$  は  $\mathbb{C}$  における 1 の原始 3 乗根とする。(説明不要。答のみでよい。)[5 点]
  - (1)  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$       (2)  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$       (3)  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)/\mathbb{Q}$
  - (4)  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$       (5)  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)/\mathbb{Q}(\omega)$
4. 次の多項式が  $\mathbb{Q}$  上分離的であるかどうかを判定せよ。(答のみでは採点しない。その根拠も書くこと。)[5 点 × 2]
  - (1)  $x^4 - 4x^2 + 8x - 4$
  - (2)  $x^4 + 4x^3 - 8x + 4$
5. 一般に  $\mathbb{Q}$  上代数的な  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  に対して  $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \cdot [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$  が正しいかどうかを答え、正しければ証明し、正しくないならば成り立たないような例をあげよ。[5 点]
6.  $K \subset M \subset L$  を体の列とする。 $L/M, M/K$  が代数的拡大であるならば  $L/K$  も代数的拡大であることを示せ。[5 点]

[5 点 × 12 = 60 点満点]