

体論・筆答レポート (第一回 2017/11/16)

1. L/K を体の拡大とする。[5 点 × 2]
 - (1) L/K が有限次拡大であることと、代数的拡大であることの定義を書け。
 - (2) 有限次拡大は代数的拡大であることを示せ。
2. 次の問に答えよ。[5 点 × 5]
 - (1) $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$ の \mathbb{Q} 上の最小多項式を求めよ。
 - (2) $\mathbb{Q}(2\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ を示せ。
 - (3) $\mathbb{Q}(2\sqrt{3} - \sqrt{3})$ の \mathbb{Q} 上の一組の基底を求めよ。
 - (4) $\mathbb{Q}(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$ の \mathbb{Q} -自己同型群 $\text{Aut}(\mathbb{Q}(2\sqrt{2} - \sqrt{3})/\mathbb{Q})$ を求めよ。
 - (5) $\mathbb{Q}(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$ の $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ -自己同型群 $\text{Aut}(\mathbb{Q}(2\sqrt{2} - \sqrt{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{3}))$ を求めよ。
3. 次の体の拡大のうち、正規拡大であるものをすべて答えよ。ただし、ここで ω は \mathbb{C} における 1 の原始 3 乗根とする。(説明不要。答のみでよい。)[5 点]
 - (1) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ (2) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ (3) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)/\mathbb{Q}$
 - (4) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ (5) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)/\mathbb{Q}(\omega)$
4. 次の多項式が \mathbb{Q} 上分離的であるかどうかを判定せよ。(答のみでは採点しない。その根拠も書くこと。)[5 点 × 2]
 - (1) $x^4 - 4x^2 + 8x - 4$
 - (2) $x^4 + 4x^3 - 8x + 4$
5. 一般に \mathbb{Q} 上代数的な $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \cdot [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$ が正しいかどうかを答え、正しければ証明し、正しくないならば成り立たないような例をあげよ。[5 点]
6. $K \subset M \subset L$ を体の列とする。 $L/M, M/K$ が代数的拡大であるならば L/K も代数的拡大であることを示せ。[5 点]

[5 点 × 12 = 60 点満点]