

体論・筆答レポート (第二回 2018/01/25)

1. 次の定義を書け。[3点 × 5]

- (1) L/K を体の拡大とし $\alpha \in L$ は K 上代数的であるとする。このとき α の K 上の最小多項式。
- (2) L/K を体の拡大とし $G = \text{Aut}(L/K)$ とする。 M を L/K 中間体とするととき G における M の不変群。
- (3) L/K を体の拡大とし $G = \text{Aut}(L/K)$ とする。 H を G の部分群とするととき L における H の不変体。
- (4) 体の拡大 L/K が正規拡大であること。
- (5) 体の拡大 L/K がガロア拡大であること。(ガロア拡大以外の「●● 拡大」は説明せずに使ってよい。)

2. 次のようなものの例を書け。(説明不要。回答のみでよい。)[3点 × 5]

- (1) \mathbb{Q} 上代数的でない複素数。
- (2) 0 でない \mathbb{Q} 上の多項式で \mathbb{Q} 上分離的でないもの。
- (3) 有理数体 \mathbb{Q} の有限次拡大 L で、拡大 L/\mathbb{Q} がガロア拡大ではないもの。
- (4) 有理数体 \mathbb{Q} の有限次拡大 L で、拡大 L/\mathbb{Q} がガロア拡大であるが、そのガロア群がアーベル群ではないもの。
- (5) 標数が素数 p の体で、有限体ではないもの。

3. $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ とする。[5点 × 2]

- (1) ガロア拡大 $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ のガロア群 G とその部分群をすべて求めよ。
- (2) (1) で求めた G のそれぞれの部分群に対して、その $\mathbb{Q}(\alpha)$ における不変体を求めよ。

4. 自然数 q に対して \mathbb{F}_q で q 元体を表すものとする。[5点 × 2]

- (1) ガロア群 $\text{Gal}(\mathbb{F}_{64}/\mathbb{F}_2)$ を求めよ。
- (2) $\mathbb{F}_{64}/\mathbb{F}_2$ の中間体をすべて求めよ。

5. 円の 8 分多項式 $\Phi_8(x)$ を求めよ。(結果だけでなく、どのように求めたのかが分かるように答えること。)[5点]

6. ζ を \mathbb{C} における 1 の原始 12 乗根とする。ガロア群 $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ を求めよ。また、それをいくつかの巡回群の直積として表わせ。[5点]

[3点 × 10 + 5点 × 6 = 60 点満点]