体論・筆答レポート (第一回 2018/11/15)

1. L/K を体の拡大とする。ただし、定義は、講義で扱った同値な条件であれば、どれを書いても構わない。[5 点 $\times$ 2]

   (1) L/K が有限次拡大であることと、代数的拡大であることの定義を書け。

   (2) L/K が分離拡大であることの定義を書け。

2. $i \in \mathbb{C}$ は虚数単位であるとする。次の問に答えよ。[5 点 $\times$ 5]

   (1) $\sqrt{2}+i$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ。

   (2) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+i) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ を示せ。

   (3) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+i)$ の $\mathbb{Q}$ 上の一組の基底を求めよ。

   (4) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+i)$ の $\mathbb{Q}$-自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}+i)/\mathbb{Q})$ を求めよ。

   (5) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+i)$ の $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}+i)/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$ を求めよ。

3. 次の $\mathbb{Q}$-上の多項式の最小分解体を求めよ。(答のみでも構わない) [5 点 $\times$ 2]
   (1) $(x^2-2)(x^2+3)$ (2) x^4-2

4. $K \subset M \subset L$ を体の列とし L/M と M/K はともに有限次拡大であるとする。$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ を L の M-上の基底、$\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ を M の K-上の基底とする。[5 点 $\times$ 2]

   (1) $\{\alpha_i\beta_j \mid 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$ は K-上一次独立であることを示せ。

   (2) L の任意の元は $\{\alpha_i\beta_j \mid 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$ の K-係数一次結合として表されることを示せ。

5. $K \subset M \subset L$ を体の列とする。L/K が分離拡大であるならば L/M と M/K も分離拡大であることを示せ。[5 点]

[5 点 $\times$ 12 = 60 点満点]