

体論・筆答レポート (第二回 2019/01/17)

1. ガロア拡大でない体の拡大の例を一つ書け。(意味が明確であれば答のみでもよい。) [5 点]
2. 4 元体 (集合としてちょうど 4 つの元をもつ体) \mathbb{F}_4 の加法と乗法の表を書け。(答のみでもよい。) [5 点]
3. $f(x) = x^3 - 2$ の \mathbb{Q} 上の最小分解体を K とする。[5 点 \times 4]
 - (1) 拡大次数 $[K : \mathbb{Q}]$ を答えよ。(答のみでもよい。)
 - (2) ガロア群 $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を求め、その群としての構造も決定せよ。
 - (3) G のすべての部分群と、各部分群の不変体を求めよ。
 - (4) (3) で求めた不変体のうち、 \mathbb{Q} 上のガロア拡大であるものをすべて答え、その \mathbb{Q} 上のガロア群も答えよ。
4. $\zeta = e^{2\pi i/12}$ (\mathbb{C} における 1 の原始 12 乗根) とする。[5 点 \times 3]
 - (1) ζ の \mathbb{Q} 上の最小多項式を求めよ。(答のみでもよい。)
 - (2) ガロア群 $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ を求め、その群としての構造も決定せよ。
 - (3) 拡大 $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ の中間体をすべて求めよ。また、そのうちに 2 次体があるならば、それを整数 a を用いて $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ の形に表せ。
5. 有限体 \mathbb{F}_{729} を考える。[5 点 \times 2]
 - (1) ガロア群 $\text{Gal}(\mathbb{F}_{729}/\mathbb{F}_3)$ を求め、その群としての構造も決定せよ。
 - (2) 拡大 $\mathbb{F}_{729}/\mathbb{F}_3$ の中間体をすべて求めよ。
6. L/K を体の有限次ガロア拡大とし、そのガロア群を $G = \text{Gal}(L/K)$ とする。 L/K の中間体 M に対して、その不変群を

$$G^M = \{\sigma \in G \mid \text{すべての } m \in M \text{ に対して } m^\sigma = m \text{ である}\}$$

と定める。また $\sigma \in G$ に対して $M^\sigma = \{m^\sigma \mid m \in M\}$ とおく。このとき $\sigma \in G$ に対して $G^{M^\sigma} = \sigma^{-1}G^M\sigma$ であることを示せ。[5 点]

[5 点 \times 12 = 60 点満点]