

体論・筆答レポート (第一回 2019/11/14, 訂正版)

- 次の問いに答えよ。((2) 以外は答えのみでもよい。) [5 点 × 5]
 - $\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ の \mathbb{Q} 上の最小多項式を求めよ。
 - $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + 2\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$ であることを示せ。
 - $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$ の \mathbb{Q} 上の一組の基底を求めよ。
 - $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$ の \mathbb{Q} -自己同型群 $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2} + 2\sqrt{5})/\mathbb{Q})$ を求めよ。
 - $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$ の $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ -自己同型群 $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2} + 2\sqrt{5})/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$ を求めよ。
- 次の多項式が分離的であるかどうかを判定せよ。(根拠も書くこと。答えのみでは採点しない。) [2 問正解で 5 点、1 問で 2 点]
 - $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4$
 - $x^4 - x^3 + 4x^2 - 3x + 9$ (不要に計算が大変な不適切問題)
- 多項式 $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ を考える。[5 点 × 2]
 - $f(x)$ の \mathbb{Q} 上の最小分解体 K を求めよ (答えのみでもよい。)
 - K/\mathbb{Q} の拡大次数 $[K : \mathbb{Q}]$ を答えよ (根拠も書くこと。答えのみでは採点しない。)
- \bar{K} を体 K の代数閉包とする。 $\alpha \in \bar{K}$ とし、 $p(x)$ を α の K 上の最小多項式とする。 $\beta \in \bar{K}$ を $p(x)$ の一つの根とし $\beta \in K(\alpha)$ であるとする。このとき $K(\alpha) = K(\beta)$ であることを示せ。[5 点]
- 体の拡大 L/K が有限次拡大であるならば L/K は代数的拡大であることを示せ。[5 点]
- $K \subset M \subset L$ を体の拡大であるとする。次の命題が正しいかどうかを答え、正しくないものについては反例を書け。(説明は不要。) [3 問正解で 10 点、2 問 6 点、1 問 2 点]
 - L/K が正規拡大であるならば M/K も正規拡大である。
 - L/K が正規拡大であるならば L/M も正規拡大である。
 - L/M と M/K が正規拡大であるならば L/K も正規拡大である。

[5 点 × 10 + 10 点 = 60 点満点]