体論・筆答レポート (第一回 2020/11/19)

1. 以下の事項が正しいかどうかを正 (◯)、誤 ($\times$) で答えよ (説明は不要)。[20 点 : 1 問不正解毎に -3 点、ただし 0 点以下にはしない]

   (1) 体の (単位元を共有する) 部分環は体である。

   (2) 2 以上の自然数 n に対して $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は通常の演算で体である。

   (3) α を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上代数的な数とするとき、$\{f(\alpha) \mid f(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$ は体である。

   (4) α, β を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上超越的な数とするとき、$\alpha + \beta$ も $\mathbb{Q}$ 上超越的な数である。

   (5) $K \subset M \subset L$ を体の列とする。L/M と M/K が代数的拡大であるならば L/K も代数的拡大である。

   (6) $K \subset M \subset L$ を体の列とする。L/K が分離拡大であるならば L/M も分離拡大である。

   (7) $K \subset M \subset L$ を体の列とする。L/K が正規拡大であるならば L/M も正規拡大である。

   (8) L/K を体の拡大とし Ω を L における K の代数的閉包とする。このとき、次数が 1 以上の任意の $f(x) \in K[x]$ は Ω に根をもつ。

   (9) 標数が素数 p である体は有限体である。

   (10) 任意の代数的拡大 L/K に対して L を含む体 E で E/K が正規拡大となるものが存在する。

2. 次の問いに答えよ。((2) 以外は答えのみでもよい。) [5 点 $\times$ 4]

   (1) $\sqrt{2} - \sqrt{5}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ。

   (2) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ であることを示せ。

   (3) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt{5})$ の $\mathbb{Q}$-自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt{5})/\mathbb{Q})$ を求めよ。

   (4) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt{5})$ の $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt{5})/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$ を求めよ。

3. 多項式 $f(x) = x^4 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体 K を求め、拡大次数 $[K : \mathbb{Q}]$ を答えよ。[5 点]

4. 多項式 $f(x) = x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 24x - 36$ が $\mathbb{Q}$-上分離的であるかどうかを判定せよ。(根拠も書くこと。答えのみでは採点しない。) [5 点]

5. $K \subset M \subset L$ を体の列とし L/M と M/K はともに有限次拡大であるとする。$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ を L の M-上の基底、$\{\beta_1 \ldots, \beta_n\}$ を M の K-上の基底とし、$B = \{\alpha_i\beta_j \mid 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ とおく。[5 点 $\times$ 2]

   (1) B は K-上一次独立であることを示せ。

   (2) L の元は B の元の K-係数一次結合として表されることを示せ。

[20 点 + 5 点 $\times$ 8 = 60 点満点]