

## 体論・筆答レポート (第二回 2021/01/21)

問 1 から問 5 は答えのみでもよい。

1.  $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$  の  $\mathbb{Q}$  上の最小分解体を  $K$  とする。[5 点  $\times$  3]
  - (1) 拡大次数  $[K : \mathbb{Q}]$  を求めよ。
  - (2) ガロア拡大  $K/\mathbb{Q}$  のガロア群  $G$  とその部分群をすべて求めよ。
  - (3) (2) で求めた  $G$  のそれぞれの部分群に対して、その不変体を求めよ。
2.  $\varepsilon = e^{2\pi i/8}$  (複素数体  $\mathbb{C}$  における 1 の原始 8 乗根) とする。次の間に答えよ。[5 点  $\times$  3]
  - (1)  $\varepsilon$  の最小多項式を求めよ。
  - (2) ガロア拡大  $\mathbb{Q}(\varepsilon)/\mathbb{Q}$  のガロア群  $G$  とその部分群をすべて求めよ。
  - (3) (2) で求めた  $G$  のそれぞれの部分群に対して、その不変体を求めよ。
3. 自然数  $q$  に対して  $\mathbb{F}_q$  で  $q$  元体を表すものとする。次の間に答えよ。[5 点  $\times$  2]
  - (1) ガロア群  $\text{Gal}(\mathbb{F}_{2^{12}}/\mathbb{F}_2)$  を求めよ。
  - (2)  $\mathbb{F}_{2^{12}}/\mathbb{F}_2$  の中間体をすべて求めよ。
4.  $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  の原始元を答えよ。[5 点]
5. 円の 12 分多項式  $\Phi_{12}(x)$  を求めよ。[5 点]
6.  $L/K$  を  $[L : K] = 2$  である体の拡大であるとする。このとき  $L/K$  は正規拡大であることを示せ。[5 点]
7.  $L/K$  をガロア拡大、 $M$  を  $L/K$  の中間体とする。  $G = \text{Gal}(L/K)$  とおく。  $M/K$  がガロア拡大であるとき、ガロア群について  $\text{Gal}(M/K) \cong G/G^M$  が成り立つことを示せ。ただし  $G^M$  は  $M$  に対する不変群であるとする。[5 点]

[5 点  $\times$  12 = 60 点満点]