

体論・筆答レポート (第二回 2021/01/21) 解答例

1. (1) 6

(2) ω を 1 の原始 3 乗根とすれば $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$ と表され、 K の \mathbb{Q} -自己同型は $\sqrt[3]{2}$ と ω の像だけで決定される。

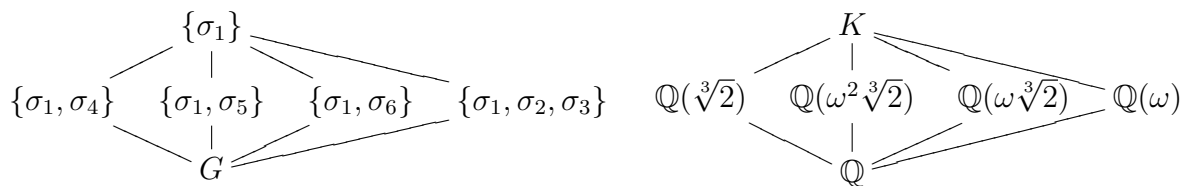
$$\begin{aligned} \sigma_1 &: (\sqrt[3]{2}, \omega) \mapsto (\sqrt[3]{2}, \omega) \\ \sigma_2 &: (\sqrt[3]{2}, \omega) \mapsto (\omega\sqrt[3]{2}, \omega) \\ \sigma_3 &: (\sqrt[3]{2}, \omega) \mapsto (\omega^2\sqrt[3]{2}, \omega) \\ \sigma_4 &: (\sqrt[3]{2}, \omega) \mapsto (\sqrt[3]{2}, \omega^2) \\ \sigma_5 &: (\sqrt[3]{2}, \omega) \mapsto (\omega\sqrt[3]{2}, \omega^2) \\ \sigma_6 &: (\sqrt[3]{2}, \omega) \mapsto (\omega^2\sqrt[3]{2}, \omega^2) \end{aligned}$$

とおけば $G = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$ である。 G の部分群は

$$G, \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}, \{\sigma_1, \sigma_4\}, \{\sigma_1, \sigma_5\}, \{\sigma_1, \sigma_6\}, \{\sigma_1\}$$

である。

(3)



2. (1) $\Phi_8(x) = x^4 + 1$

(2) $G \cong U(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \{1, 3, 5, 7\}$ であるから

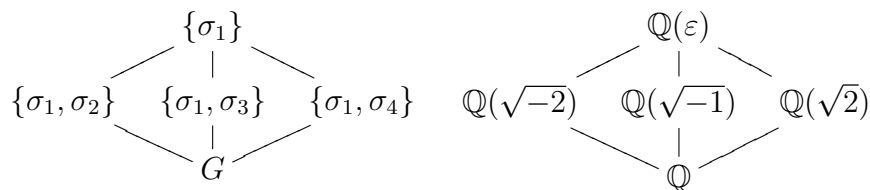
$$\begin{aligned} \sigma_1 &: \varepsilon \mapsto \varepsilon \\ \sigma_2 &: \varepsilon \mapsto \varepsilon^3 \\ \sigma_3 &: \varepsilon \mapsto \varepsilon^5 \\ \sigma_4 &: \varepsilon \mapsto \varepsilon^7 \end{aligned}$$

とおけば $G = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\} \cong C_2 \times C_2$ である。 G の部分群は

$$G, \{\sigma_1, \sigma_2\}, \{\sigma_1, \sigma_3\}, \{\sigma_1, \sigma_4\}, \{\sigma_1\}$$

である。

(3)



3. (1) $\text{Gal}(\mathbb{F}_{2^{12}}/\mathbb{F}_2) = \langle \sigma \rangle = \{\sigma^0, \sigma^1, \dots, \sigma^{11}\} \cong C_{12}$ である。ただしここで σ は任意の $\alpha \in \mathbb{F}_{2^{12}}$ に対して $\alpha^\sigma = \alpha^2$ で定まるものである。
- (2) $\mathbb{F}_{2^{12}}, \mathbb{F}_{2^6}, \mathbb{F}_{2^4}, \mathbb{F}_{2^3}, \mathbb{F}_{2^2}, \mathbb{F}_2$
4. 3 (または 5)
5. $\Phi_{12}(x) = x^4 - x^2 + 1$
6. $\alpha \in L \setminus K$ とすれば $K(\alpha) \supsetneq K$ であり、 $[L:K] = 2$ より $K(\alpha) = L$ である。よって α の最小多項式は 2 次式で、それを $x^2 + ax + b \in K[x]$ とすれば α の K -共役は b/α である。また $L = K(\alpha) = K(b/\alpha)$ が成り立つ。よって L の K -共役はすべて等しく、 L/K は正規拡大である。
7. $G = \text{Gal}(L/K)$, $H = \text{Gal}(M/K)$ とおく。写像 $f: G \rightarrow H$ を $f(\sigma) = \sigma|_M$ で定めると、これは群準同型である。 M の自己同型は L に拡張されるから f は全射である。また f の核は G^M に一致する。したがって準同型定理より $H \cong G/G^M$ となる。