体論・筆答レポート (第二回 2021/01/21) 解答例

1. (1) 6

   (2) ω を 1 の原始 3 乗根とすれば $K=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)$ と表され、K の $\mathbb{Q}$-自己同型は $\sqrt[3]{2}$ と ω の像だけで決定される。

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &: (\sqrt[3]{2},\omega)\mapsto(\sqrt[3]{2},\omega)\\
\sigma_2 &: (\sqrt[3]{2},\omega)\mapsto(\omega\sqrt[3]{2},\omega)\\
\sigma_3 &: (\sqrt[3]{2},\omega)\mapsto(\omega^2\sqrt[3]{2},\omega)\\
\sigma_4 &: (\sqrt[3]{2},\omega)\mapsto(\sqrt[3]{2},\omega^2)\\
\sigma_5 &: (\sqrt[3]{2},\omega)\mapsto(\omega\sqrt[3]{2},\omega^2)\\
\sigma_6 &: (\sqrt[3]{2},\omega)\mapsto(\omega^2\sqrt[3]{2},\omega^2)
\end{aligned}$$

   とおけば $G=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6\}$ である。G の部分群は

$$G,\quad\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\},\quad\{\sigma_1,\sigma_4\},\quad\{\sigma_1,\sigma_5\},\quad\{\sigma_1,\sigma_6\},\quad\{\sigma_1\}$$

   である。

   (3)

$$\begin{tikzcd}
 & \{\sigma_1\} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\{\sigma_1,\sigma_4\} \arrow[dr, dash] & \{\sigma_1,\sigma_5\} \arrow[d, dash] & \{\sigma_1,\sigma_6\} \arrow[dl, dash] & \{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\} \arrow[dll, dash] \\
 & G & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(\omega^2\sqrt[3]{2}) \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(\omega\sqrt[3]{2}) \arrow[dl, dash] & \mathbb{Q}(\omega) \arrow[dll, dash] \\
 & \mathbb{Q} & &
\end{tikzcd}$$

2. (1) $\Phi_8(x)=x^4+1$

   (2) $G\cong U(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{1,3,5,7\}$ であるから

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &: \varepsilon\mapsto\varepsilon\\
\sigma_2 &: \varepsilon\mapsto\varepsilon^3\\
\sigma_3 &: \varepsilon\mapsto\varepsilon^5\\
\sigma_4 &: \varepsilon\mapsto\varepsilon^7
\end{aligned}$$

   とおけば $G=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4\}\cong C_2\times C_2$ である。G の部分群は

$$G,\quad\{\sigma_1,\sigma_2\},\quad\{\sigma_1,\sigma_3\},\quad\{\sigma_1,\sigma_4\},\quad\{\sigma_1\}$$

   である。

   (3)

$$\begin{tikzcd}
 & \{\sigma_1\} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\{\sigma_1,\sigma_2\} \arrow[dr, dash] & \{\sigma_1,\sigma_3\} \arrow[d, dash] & \{\sigma_1,\sigma_4\} \arrow[dl, dash] \\
 & G &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}(\varepsilon) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}(\sqrt{-2}) \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt{-1}) \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

3. (1) $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{2^{12}}/\mathbb{F}_2) = \langle\sigma\rangle = \{\sigma^0, \sigma^1, \ldots, \sigma^{11}\} \cong C_{12}$ である。ただしここで σ は任意の $\alpha \in \mathbb{F}_{2^{12}}$ に対して $\alpha^\sigma = \sigma^2$ で定まるものである。

   (2) $\mathbb{F}_{2^{12}}, \mathbb{F}_{2^6}, \mathbb{F}_{2^4}, \mathbb{F}_{2^3}, \mathbb{F}_{2^2}, \mathbb{F}_2$

4. 3 (または 5)

5. $\Phi_{12}(x) = x^4 - x^2 + 1$

6. $\alpha \in L \setminus K$ とすれば $K(\alpha) \supsetneq K$ であり、$[L:K] = 2$ より $K(\alpha) = L$ である。よって α の最小多項式は 2 次式で、それを $x^2 + ax + b \in K[x]$ とすれば α の K-共役は b/α である。また $L = K(\alpha) = K(b/\alpha)$ が成り立つ。よって L の K-共役はすべて等しく、L/K は正規拡大である。

7. $G = \mathrm{Gal}(L/K)$, $H = \mathrm{Gal}(M/K)$ とおく。写像 $f : G \to H$ を $f(\sigma) = \sigma\mid_M$ で定めると、これは群準同型である。M の自己同型は L に拡張されるから f は全射である。また f の核は G^M に一致する。したがって準同型定理より $H \cong G/G^M$ となる。