体論・筆答レポート (第一回 2021/11/18) 解答例

1. (1) $x^4 - 10x^2 + 1$

   (2) $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ より $\sqrt{2} - \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ であるから $\mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ である。
   $\alpha = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ とおく。計算により $\sqrt{2} = (\alpha^3 - 9\alpha)/2 \in \mathbb{Q}(\alpha)$, $\sqrt{3} = (\alpha^3 - 11\alpha)/2 \in \mathbb{Q}(\alpha)$ となるから $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ である。
   よって $\mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ である。

   (3) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in Q\}$ である。$\sigma_i \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt{3})/\mathbb{Q})$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ を以下のように定める。

$$\begin{aligned}
\sigma_1 : a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} &\mapsto a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \\
\sigma_2 : a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} &\mapsto a + b\sqrt{2} - c\sqrt{3} - d\sqrt{6} \\
\sigma_3 : a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} &\mapsto a - b\sqrt{2} + c\sqrt{3} - d\sqrt{6} \\
\sigma_4 : a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} &\mapsto a - b\sqrt{2} - c\sqrt{3} + d\sqrt{6}
\end{aligned}$$

   このとき $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt{3})/\mathbb{Q}) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$ である。

   (4) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ である。

2. $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q})$ を $(\sqrt[4]{2})^\sigma = -\sqrt[4]{2}$ で定まるものとする。このとき $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/Q) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})}, \sigma\}$ である。

3. (1) 分離的である。($x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 6x + 4 = (x - 2)(x + 1)(x^2 - 2x - 2)$ なので、これは重根をもたない。)

   (2) 分離的でない。($x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = (x^2 - x + 2)^2$ なので、これは重根をもつ。)

4. $A = \{\alpha_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ を L の M ベクトル空間としての基底、$B = \{\beta_j \mid j = 1, \ldots, n\}$ を M の K ベクトル空間としての基底とする。$C = \{\alpha_i\beta_j \mid i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\}$ が L の K ベクトル空間としての基底であることを示せばよい。

   (生成すること). $\gamma \in L$ とする。A は L の M ベクトル空間としての基底であるから、ある $s_1, \ldots, s_m \in M$ が存在して $\gamma = \sum_{i=1}^m s_i\alpha_i$ と書くことができる。各 $s_i \in M$ に対して、B が M の K ベクトル空間としての基底であることから、ある $t_{i1}, \ldots, t_{in} \in K$ が存在して $s_i = \sum_{j=1}^n t_{ij}\beta_j$ と書くことができる。よってこのとき

$$\gamma = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij}\alpha_i\beta_j$$

   となる。C は K ベクトル空間として L を生成する。

   (一次独立であること). $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij}\alpha_i\beta_j = 0$ $(t_{ij} \in K)$ とする。$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n t_{ij}\beta_j\right)\alpha_i = 0$ であり、$\sum_{j=1}^n t_{ij}\beta_j \in M$ で A が L の M ベクトル空間としての基底であるから、すべての $i = 1, \ldots, m$ に対して $\sum_{j=1}^n t_{ij}\beta_j = 0$ となる。各 i に対して、B が M の K ベクトル空間としての基底であるから、すべての $j = 1, \ldots, n$ に対して $t_{ij} = 0$ となる。したがってすべての組 (i, j) に対して $t_{ij} = 0$ となり、C は K 上一次独立である。

   以上を合わせて C は L の K ベクトル空間としての基底であり $[L : K] = [L : M][M : K]$ が成り立つ。

5. L/K を有限次拡大とし $[L : K] = n$ とする。$\alpha \in L$ とする。$1, \alpha, \ldots, \alpha^n$ は L の $(n + 1)$ 個の元なので K 上一次従属であり、したがって $(0, \ldots, 0) \neq (a_0, \ldots, a_n) \in K^{n+1}$ が存在して $\sum_{i=0}^n a_i\alpha^i = 0$ となる。$f(x) = \sum_{i=0}^n a_ix^i \in K[x]$ とおけば $f(x) \neq 0$ で $f(\alpha) = 0$ となるから α は K 上代数的である。よって L/K は K 上代数的拡大である。

6. $\overline{K}$ を L を含む K の代数的閉包とする。σ を L の $\overline{K}$ の中への M-同型とする。このとき $K \subset M$ なので、σ は L の $\overline{K}$ の中への K-同型である。L/K が正規拡大なので $L^\sigma = L$ が成り立ち、したがって L/M も正規拡大である。

7. (L/M について). $\alpha \in L$ とする。L/K は分離拡大なので $p(x) = \mathrm{Irr}(\alpha, K, x)$ は分離的である。$p(x) \in K[x] \subset M[x]$ と見れば $p(x)$ は分離的な M 係数多項式で α を根にもつ。したがって α は M 上分離的である。よって L/M は分離拡大である。

   (M/K について). $\alpha \in M$ とする。$\alpha \in M \subset L$ なので α は K 上分離的である。よって M/K は分離拡大である。

8. 分離次数 $[K(\alpha) : K]_s$ は $K(\alpha)$ から $\overline{K}$ の中への K-同型の個数を表し、したがって最小多項式 $\mathrm{Irr}(\alpha, K, x)$ の $\overline{K}$ における異なる根の数に等しい。また $|\,\mathrm{Aut}(K(\alpha)/K)|$ は $\mathrm{Irr}(\alpha, K, x)$ の $\overline{K}$ における異なる根のうち $K(\alpha)$ に含まれるものの数となる。したがって $[K(\alpha) : K]_s \geq |\,\mathrm{Aut}(K(\alpha)/K)|$ である。