体論・筆答レポート (第二回 2022/01/20)

1. $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を K とする。次の問に答えよ。(答えのみでもよい。(1), (2) を区別しないで書いてもよい。ハッセ図を用いて表してもよい。) [5 点 × 2]

   (1) ガロア拡大 $K/\mathbb{Q}$ のガロア群 G とその部分群をすべて求めよ。

   (2) (1) で求めた G の部分群に対して、その不変体を求めよ。

2. $\zeta = e^{2\pi i/12}$ (複素数体 $\mathbb{C}$ における 1 の原始 12 乗根) とする。次の問に答えよ。(計算の過程も書くこと。(1), (2), (3) を区別しないで書いてもよい。ハッセ図を用いて表してもよい。) [5 点 × 3]

   (1) ガロア拡大 $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ のガロア群 G とその部分群をすべて求めよ。

   (2) (1) で求めた G のそれぞれの部分群に対して、その不変体を求めよ。

   (3) (2) で求めた不変体のうち $\mathbb{Q}$ 上 2 次体であるものについて、それを 整数 n を用いて $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ の形に表せ。

3. 自然数 q に対して $\mathbb{F}_q$ で q 元体を表すものとする。次の問に答えよ。(答えのみでもよい。) [5 点 × 2]

   (1) ガロア群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{3^6}/\mathbb{F}_3)$ を求めよ。

   (2) $\mathbb{F}_{3^6}/\mathbb{F}_3$ の中間体をすべて求めよ。

4. 円分多項式 $\Phi_{16}(x)$ を求めよ。 (答えのみでもよい。) [5 点]

5. K を標数 $p\ (>0)$ の体とする。[5 点 × 2]

   (1) 写像 $f : K \to K,\ f(\alpha) = \alpha^p$ は単射であることを示せ。

   (2) (1) の写像 f が全射とならないような体 K を具体的に書け。(厳密な証明でなくてもよいが、説明も与えよ。)

6. L/K を有限次ガロア拡大とし、$G = \mathrm{Gal}(L/K)$ をガロア群、M を L/K の中間体とする。M/K がガロア拡大であるならば、不変群 G^M は G の正規部分群であることを示せ。 [5 点]

7. L を $\mathbb{C}$ の部分体で $\mathbb{R}$ に含まれないものとし、$L/\mathbb{Q}$ を有限次ガロア拡大とする。このとき $L/\mathbb{Q}$ の中間体 M で $[L : M] = 2,\ M \subset \mathbb{R}$ となるものが存在することを示せ。[5 点]

[5 点 × 12 = 60 点満点]