

体論・筆答レポート (第一回 2022/11/24)

- 次の問いに答えよ。(2) 以外は答えのみでもよい。 [5 点 × 4]
 - $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$ の \mathbb{Q} 上の最小多項式を求めよ。
 - $\mathbb{Q}(2\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ であることを示せ。
 - $\mathbb{Q}(2\sqrt{2} + \sqrt{3})$ の \mathbb{Q} -自己同型群 $\text{Aut}(\mathbb{Q}(2\sqrt{2} + \sqrt{3})/\mathbb{Q})$ を求めよ。
 - $\mathbb{Q}(2\sqrt{2} + \sqrt{3})$ の $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ -自己同型群 $\text{Aut}(\mathbb{Q}(2\sqrt{2} + \sqrt{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{3}))$ を求めよ。
- $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$ を求めよ。(答えのみでもよい。) [5 点]
- 次の多項式が分離的であるかどうかを判定せよ。(根拠も書くこと。答えのみでは採点しない。) [5 点 × 2]
 - $x^4 - 10x^2 + 1$
 - $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4$
- L/K を体の拡大とし $[L : K] = 3$ であるとする。 $\alpha \in L, \alpha \notin K$ であるならば α の K 上の最小多項式の次数は 3 であることを示せ。 [5 点]
- 体の有限次拡大は代数的拡大であることを示せ。 [5 点]
- L/K を体の拡大とする。 α と β を K 上代数的な L の元とする。このとき $\alpha + \beta$ も K 上代数的であることを示せ。 [5 点]
- $K \subset M \subset L$ を体の列とする。 L/K が正規拡大であるならば L/M も正規拡大であることを示せ。 [5 点]
- 0 でない多項式 $f(x) \in K[x]$ が分離的であることと、 $f(x)$ と $f'(x)$ が共通根をもたないことは同値である。これを示せ。ただし $f'(x)$ は $f(x)$ の形式的微分である。 [5 点]

[5 点 × 12 = 60 点満点]