

体論・筆答レポート (第二回 2023/01/19)

1. $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ の \mathbb{Q} 上の最小分解体を K とする。次の問に答えよ。
(答えのみでもよい。(1), (2) を区別しないで書いてもよい。ハッセ図を用いて表してもよい。) [5 点 \times 2]
 - (1) ガロア拡大 K/\mathbb{Q} のガロア群 G とその部分群をすべて求めよ。
 - (2) (1) で求めた G の部分群に対して、その不変体を求めよ。
2. $\zeta = e^{2\pi i/7}$ (複素数体 \mathbb{C} における 1 の原始 7 乗根) とする。次の問に答えよ。
(計算の過程も書くこと。(1), (2), (3) を区別しないで書いてもよい。ハッセ図を用いて表してもよい。) [5 点 \times 3]
 - (1) ガロア拡大 $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ のガロア群 G とその部分群をすべて求めよ。
 - (2) (1) で求めた G のそれぞれの部分群に対して、その不変体を求めよ。
 - (3) (2) で求めた不変体のうち \mathbb{Q} 上 2 次体であるものについて、それを整数 n を用いて $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ の形に表せ。
3. 自然数 q に対して \mathbb{F}_q で q 元体を表すものとする。また p を素数とする。次の問に答えよ。(答えのみでもよい。) [5 点 \times 2]
 - (1) ガロア群 $\text{Gal}(\mathbb{F}_{p^{40}}/\mathbb{F}_{p^2})$ を求めよ。
 - (2) $\mathbb{F}_{p^{40}}/\mathbb{F}_{p^2}$ の中間体をすべて求めよ。
4. L/K を体の拡大とし、 L も K も有限体であるとする。このとき L/K は分離拡大であることを示せ。 [5 点]
5. 有限体 \mathbb{F}_9 の原始元の \mathbb{F}_3 上の最小多項式を求めよ。(計算の過程も書くこと。) [5 点]
6. 代数的拡大 L/K とその中間体 M で $L^{(G^M)} \neq M$ となるような例を書け。ただし $G = \text{Aut}(L/K)$ は L の K -自己同型群、 G^M は不変群、 L^H は不変体を表すものとする。(L, M, K を明確に書くこと。) [5 点]
7. 以下のようなものの例を書け。 [2 点 \times 5]
 - (1) 代数的閉体
 - (2) 体の分離的でない代数的拡大
 - (3) 体の正規拡大でない代数的拡大
 - (4) 標数が 0 でない無限体 (要素を無限個もつ体)
 - (5) 体の超越拡大

[(5 点 \times 10) + (2 点 \times 5) = 60 点満点]