群論演習 (第一回 2011/10/06)

1. 集合 A の二項演算を $f : A \times A \to A$ とする。この演算に関する結合法則を f を用いて表せ。同様に単位元の性質を f を用いて表せ。

2. 群 G の元 a, b, a_i に対して、次のことを示せ。

   (1) $(a^{-1})^{-1} = a$ である。

   (2) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ である。より一般に $(a_1 \cdots a_\ell)^{-1} = {a_\ell}^{-1} \cdots {a_1}^{-1}$ である。

3. 群 G の部分集合 H が G の部分群であることの定義を述べよ。

4. H, K が群 G の部分群ならば、$H \cap K$ も G の部分群であることを示せ。

5. 群 G の中心 $Z(G)$ は G の部分群であることを示せ。ただし、ここで $Z(G) = \{a \in G \mid 任意の\ x \in G\ に対して\ ax = xa\}$ である。

6. 群 G の二つの部分群 H, K について、HK が G の部分群になることと $HK = KH$ が成り立つことは同値であることを示せ。

7. H が群 G の部分群であるならば $H = H^{-1}$ であることを示せ。

8. $\mathbb{Z}$ を加法群と見る。

   (1) $n \in \mathbb{Z}$ に対して $n\mathbb{Z} = \{n\ell \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{Z}$ の部分群であることを示せ。

   (2) $\mathbb{Z}$ の部分群 $n\mathbb{Z}$ による剰余類分解とその完全代表系を求めよ。

9. G を群、H をその部分群とする。$a, b \in G$ に対して、$ab^{-1} \in H$ となるときに $a \sim_r b$ として、G 上の関係 $\sim_r$ を定める。このとき $\sim_r$ は同値関係であることを示せ。

10. G を群とし $a \in G$ とする。写像 $f : G \to G$ を $f(g) = ag$ で定めれば、f は全単射であることを示せ。

11. 複素数を成分とする n 次正則行列全体の集合 $GL_n(\mathbb{C})$ は行列の乗法を演算として群となることを示せ。

群論演習 (第二回 2011/10/13)

1. G をアーベル群とする。自然数 n を固定する。

$$H = \{g \in G \mid g^n = 1\}, \quad K = \{g^n \mid g \in G\}$$

とする。このとき H, K は G の部分群になることを示せ。

2. 3 次対称群 $G = S_3$ を考える。
   (1) G の元をすべて書け。
   (2) $H = \{g \in G \mid g^3 = 1\}$ を求め、H は G の正規部分群になることを示せ。
   (3) $K = \{g \in G \mid g^2 = 1\}$ を求め、K は G の部分群ではないことを示せ。

3. G を有限群とし、$g \in G$ とする。元 g の位数 $o(g)$ は群 G の位数 $|G|$ の約数であることを示せ。

4. G を有限群とし、位数 $|G|$ は素数であるとする。このとき G の部分群は自明なもの、すなわち 1 と G、に限ることを示せ。

5. G を群、H を G の部分群とする。
   (1) $g \in G$ に対して、$gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$ も G の部分群であることを示せ。
   (2) $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ とおく。このとき $N_G(H)$ は G の部分群であることを示せ。($N_G(H)$ を H の G における**正規化群** (normalizer) という。)
   (3) $x, y \in G$ に対して

$$xHx^{-1} = yHy^{-1} \iff xN_G(H) = yN_G(H)$$

   を示せ。
   (4) $x \in G$ に対して $N_G(xHx^{-1}) = xN_G(H)x^{-1}$ であることを示せ。

6. 群 G の任意の元 x に対して $x^2 = 1$ が成り立つならば G はアーベル群であることを示せ。

群論演習 (第三回 2011/10/20)

1. 置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 5 & 8 & 1 & 2 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ を共通の数字を含まないいくつかの巡回置換の積に分解し、その型を求めよ。また、この置換の位数を求めよ。

2. 巡回置換 $(1\ 2\ \cdots\ \ell) = (1\ \ell)(1\ \ell-1)\cdots(1\ 3)(1\ 2)$ を示せ。

3. 任意の n 次の置換はいくつかの互換の積として表すことが出来ることを示せ。

4. $\sigma = (1\ 5)(2\ 4\ 3)$, $\tau = (1\ 2\ 3)$ とし、$\tau\sigma\tau^{-1}$ を計算せよ。

5. 5 次対称群 S_5 に長さ 3 の巡回置換はいくつあるか答えよ。

6. 置換 $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6)$ の符号をそれぞれ求めよ。

7. A_4 の元をすべて書け。

8. $GL_2(2)$ の元をすべて書け。ただし $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ と表すことにする。

9. $GL_n(q)$ の位数を求めよ。

10. n 次直交群 $O(n)$ は $GL_n(\mathbb{R})$ の部分群になることを示せ。ただし $O(n) = \{T \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^tTT = T{}^tT = E$ (単位行列)$\}$ である。

11. H が G の部分群で N が G の正規部分群ならば HN は G の部分群であることを示せ。また H, K が群 G の正規部分群ならば、HK も G の正規部分群であることを示せ。

12. H が G の部分群で N が G の正規部分群ならば $H \cap N$ は H の正規部分群であることを示せ.

13. G を位数 n の有限巡回群とするとき、$d \mid n$ に対して $\sharp\{x \in G \mid x^d = 1\} = d$ であることを示せ。

14. $N \trianglelefteq G$ とし $g \in G$ とする。このとき剰余群 G/N における gN の位数 $o(gN)$ は $o(g)$ の約数であることを示せ。ただし g と gN の位数はそれぞれ有限であるものとする。

群論演習 (第四回 2011/10/27)

1. $\mathbb{Z}$ を加法群と見る。$a \in \mathbb{Z}$ を一つ固定する。このとき $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を $f(x) = ax$ で定めれば、これは準同型であることを示せ。

2. G を群とし $g \in G$ を一つ固定する。このとき $f : G \to G$ を $f(x) = g^{-1}xg$ で定めれば、これは準同型であることを示せ。

3. G をアーベル群とする。$f : G \to G$ を $f(x) = x^2$ で定めれば、これは準同型であることを示せ。また、G がアーベル群でないならば、f は準同型にならないことを示せ。

4. n-次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ を加法群と見る。$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f((a, b)) = (b, 0)$ で定める。

   (1) f は準同型であることを示せ。

   (2) f の核と像を求めよ。

5. 群 G と単準同型 $f : G \to G$ で同型でないものを具体的に一つ構成せよ。

6. 群 G と全準同型 $f : G \to G$ で同型でないものを具体的に一つ構成せよ。(やや難しい ?)

7. $f : G \to H$ を群準同型とし $A \leq H$ とする。このとき $f^{-1}(A) \leq G$ であることを示せ。また $A \trianglelefteq H$ ならば $f^{-1}(A) \trianglelefteq G$ であることを示せ。

8. $f : G \to H$ を群準同型とし $B \trianglelefteq G$ としても、$f(B) \trianglelefteq H$ とは限らない。このような例を具体的に構成せよ。

9. G を群とする。$a, b \in G$ に対して $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ とおいて、これを a と b の**交換子** (commutator) という。G のすべての交換子で生成される部分群を G の**交換子群** (derived subgroup) といい $D(G)$ と書く。

   (1) $[a, b] = 1$ であることと a と b が可換であることは同値であることを示せ。

   (2) $D(G)$ は G の正規部分群であることを示せ。

   (3) $G/D(G)$ はアーベル群であることを示せ。

   (4) $N \trianglelefteq G$ とする。G/N がアーベル群ならば $D(G) \subset N$ であることを示せ。

群論演習 (第五回 2011/11/10)

1. $f : G \to H$ を群準同型とする。

   (1) $\mathrm{Im}f$ は H の部分群であることを示せ。

   (2) $\mathrm{Ker}f$ は G の正規部分群であることを示せ。

   (3) $N \trianglelefteq G$ が $N \subset \mathrm{Ker}f$ をみたすとする。このとき写像 $\overline{f} : G/N \to H$, $\overline{f}(gN) = f(g)$ が矛盾なく定義でき、更に準同型となることを示せ。

   (4) (3) で定義された $\overline{f}$ の核を求めよ。

2. $\mathbb{Z}$ などを加法群と見る。$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元は $\overline{a} = a + n\mathbb{Z}$ のように略記する。異なる n に対しても同じ記号を用いるので注意すること。

   (1) 準同型 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 4x$ の核と像を求めよ。またこの準同型に準同型定理を適用して得られる同型を答えよ。

   (2) 準同型 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $f(x) = 6\overline{x}$ の核と像を求めよ。またこの準同型に準同型定理を適用して得られる同型を答えよ。

   (3) 準同型 $f : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $f(\overline{x}) = 6\overline{x}$ の核と像を求めよ。またこの準同型に準同型定理を適用して得られる同型を答えよ。

   (4) 準同型 $f : \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $f(\overline{x}) = 3\overline{x}$ の核と像を求めよ。またこの準同型に準同型定理を適用して得られる同型を答えよ。

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C} - \{0\}$ を $f(\theta) = e^{i\theta}$ で定める。ただし i は虚数単位である。

   (1) f は加法群 $\mathbb{R}$ から乗法群 $\mathbb{C}^{\times}$ への準同型であることを示せ。

   (2) f の像と核を求めよ。

   (3) f に準同型定理を適用して得られる同型を答えよ。

4. $N \trianglelefteq G$ とし $f : G \to G/N$ を自然な全準同型とする。

   (1) G/N の部分群 B に対して $f(f^{-1}(B)) = B$ を示せ。

   (2) G の部分群 A が N を含むならば $f^{-1}(f(A))) = A$ であることを示せ。

   (3) $\mathscr{A}$ を G の部分群で N を含むもの全体の集合、$\mathscr{B}$ を G/N の部分群全体の集合とする。このとき $\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ の間には全単射が存在することを示せ。

群論演習 (第六回 2011/11/17)

1. G, H, K を群とし、$f : G \to H$, $g : H \to K$ を準同型とする。このとき合成写像 $g \circ f : G \to K$ も準同型であることを示せ。

2. $f : G \to H$ を同型、すなわち準同型かつ全単射、とする。このとき逆写像 $f^{-1} : H \to G$ も同型であることを示せ。

3. $H \leq G$, $N \trianglelefteq G$ とする。このとき $H \cap N \trianglelefteq H$ であることを示せ。

4. 巡回群 $G = \langle g \rangle$ と群 H を考える。準同型 $f : G \to H$ は $f(g)$ のみによって定まることを示せ。

5. C_n で位数 $n(< \infty)$ の巡回群を表すことにする。C_4 から C_6 への準同型をすべて書け。また、それぞれの準同型に準同型定理を適用して得られる同型を答えよ。

6. C_8 から C_8 への準同型をすべて書け。また、得られた準同型のうち、どれが同型であるかを答えよ。

7. $|\mathrm{Aut}(C_n)| = \varphi(n)$ であることを示せ。ただし $\varphi(n)$ はオイラー関数で、n 以下の自然数で n と互いに素であるものの個数を表すものとする。

8. G, H を有限群とし $f : G \to H$ を準同型とする。$g \in G$ に対して $o(f(g)) \mid o(g)$ であることを示せ。特に f が同型ならば $o(f(g)) = o(g)$ であることを示せ。ただし $o(g)$ は群の元 g の位数を表すものとする。

9. $N \trianglelefteq G$ とし H を N の特性部分群とする。このとき $H \trianglelefteq G$ であることを示せ。

10. 位数 6 の巡回群 $G = C_6$ の部分群をすべて決定せよ。また、それらはすべて G の特性部分群であることを示せ。

11. 位数 n の有限巡回群 $G = C_n$ の部分群をすべて決定せよ。また、それらはすべて G の特性部分群であることを示せ。

群論演習 (第七回 2011/11/24)

1. $f: G \to H$ を準同型とする。

   (1) $A \leq G$ に対して、$f(A) \leq H$ を示せ。

   (2) $B \leq H$ に対して、$f^{-1}(B) \leq G$ を示せ。

   (3) $N = \mathrm{Ker} f$ とする。$A \leq G$ に対して $f^{-1}(f(A)) = NA$ を示せ。

2. $G = S_n$ (n 次対称群) とし、$H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\}$ とおく。

   (1) H は G の部分群であることを示せ。

   (2) $n \geq 3$ ならば H は G の正規部分群ではないことを示せ。

3. G を群、$Z(G)$ を G の中心とする $G/Z(G)$ が巡回群であるならば G はアーベル群であることを示せ。(したがって、このとき $G = Z(G)$ となる。)

4. G を群とする。$g, h \in G$ に対して $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ とおいて、これを g と h の**交換子**という。

   (1) $A \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq G$ とするとき、$a \in A$, $b \in B$ に対して $[a, b] \in A \cap B$ であることを示せ。

   (2) $A \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq G$, $A \cap B = 1$ とするとき、A の元と B の元は可換になることを示せ。

5. 群 G は集合 X に左から作用するものとする。

   (1) $x, y \in X$ に対して $y = gx$ となる $g \in G$ が存在するとき $x \sim y$ として、X 上の関係 $\sim$ を定める。このとき $\sim$ は同値関係であることを示せ。

   (2) $x \in X$ に対して、その安定化部分群を $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ とする。G_x は G の部分群であることを示せ。

   (3) $x \in X$, $g, h \in G$ に対して $gx = hx$ であることと $gG_x = hG_x$ であることは同値であることを示せ。

   (4) (1) の同値関係について、$x \in X$ を含む同値類を Gx と表す。すなわち $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ である。$|Gx| < \infty$ ならば $|Gx| = |G : G_x|$ であることを示せ。

群論演習 (第八回 2011/12/01)

今回分のレポートは 12 月 7 日 (水) 17:00 までに研究室前の提出箱に提出すること。

1. 群 G は集合 X に、$(g, x) \mapsto gx$ で、左から作用するものとする。$x \in X$ と $g \in G$ に対して $x^g = g^{-1}x$ で x^g を定めると、これは G の X への右からの作用となることを示せ。

2. 5 次対称群 S_5 の部分群 $G = \langle (1\ 2)(3\ 4\ 5), (3\ 4) \rangle$ を考える。G は自然に $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ に作用する。

   (1) G の元をすべて書け。

   (2) G による X の軌道をすべて求めよ。

   (3) $x = 1, 2, 3, 4, 5$ に対して、その安定化部分群 G_x を求めよ。

3. G を 3 次対称群 S_3 とする。G の G 自身への左からの作用を ${}^g x = gxg^{-1}$ で定める。

   (1) これが作用となることを確認せよ。

   (2) G による軌道をすべて求めよ。

   (3) $x = (1\ 2\ 3)$ に対して、安定化部分群 G_x を求めよ。

4. n を自然数とする。$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を乗法に関するモノイドと見て、その単数群を G とする。

   (1) $g \in G$ と $a + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して、$g(a + n\mathbb{Z})$ を $ga + n\mathbb{Z}$ で定めれば、これは G の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ への作用となることを示せ。

   (2) $n = 5, 6, 8$ に対して (1) の作用を考え、その軌道を求めよ。

群論演習 (第九回 2011/12/08, 訂正版)

1. 二面体群 $G = D_8 = \langle x, y \mid x^4 = y^2 = 1,\ yx = x^3 y \rangle$ とその部分群 $H = \langle y \rangle$ を考える。

   (1) G の H による左剰余類分解を求めよ。

   (2) G の左剰余類全体の集合 G/H への左からの自然な作用を考え、xH の安定化部分群を求めよ。

   (3) $N_G(H)$ を求めよ。

   (4) $C_G(x)$ を求めよ。

   (5) G の共役類を求め、類等式を書け。

2. 4 次交代群 A_4 を考える。

   (1) A_4 の元をすべて書け。(位数は 12 である。)

   (2) A_4 の共役類を求め、類等式を書け。

   (3) A_4 に位数 6 の部分群が存在するならばそれは正規部分群であることを示せ

   (4) A_4 に位数 6 の部分群はないことを示せ。

3. p を素数とするとき、位数 p^2 の群はアーベル群であることを以下の方針で示せ。

   (1) 一般に、群 G について、$G/Z(G)$ が巡回群であるならば G はアーベル群であることを示せ。

   (2) 位数 p^2 の群の類等式の可能性をすべて書け。

   (3) 位数 p^2 の群はアーベル群であることを示せ。

4. G を有限群とする。$x \in G$ に対して、x を含む共役類に含まれる元の数 $|^G x|$ は $|G|$ の約数であることを示せ。また $|G| \neq 1$ ならば $|^G x| \neq |G|$ であることを示せ。

5. 立方体を自分自身へと移すような頂点の置換全体のなす群の位数を求めよ。また正 20 面体で同様に定義される群の位数を求めよ。(正 20 面体は一つの頂点に 5 つの正三角形が集まってできている。)

群論演習 (第十回 2011/12/15)

1. G を位数 120 の群とする。
   (1) $p = 2, 3, 5$ について G のシロー p-部分群の位数を答えよ。
   (2) $p = 2, 3, 5$ について G のシロー p-部分群の個数の可能性について、シローの定理から分かる範囲で答えよ。

2. G を位数 15 の群とする。
   (1) $p = 3, 5$ について G のシロー p-部分群の位数を答えよ。
   (2) $p = 3, 5$ について G のシロー p-部分群の個数の可能性について、シローの定理から分かる範囲で答えよ。
   (3) G は巡回群であることを示せ。

3. p を素数とし、G を有限群とする。G の正規 p-部分群 Q は G の任意のシロー p-部分群に含まれることを示せ。

4. G を有限群とし H を G の正規部分群とする。p を素数とし $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$ とする。このとき $G = HN_G(P)$ となることを示せ。

5. 次の群を考える。

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^3 = 1,\ yx = xy,\ zx = yz,\ zy = xyz \rangle$$

   (1) G の任意の元は $x^i y^j z^k$ の形に書くことが出来ることを確認し、G の元をすべて書け。
   (2) G の元の位数をすべて求めよ。
   (3) 位数が 2-べきである元の個数を求めよ。
   (4) G のシロー 2 部分群は正規部分群であることを示せ。
   (5) G のシロー 3 部分群の個数を求めよ
   (6) G の共役類をすべて求め、類等式を書け。

群論演習 (第十一回 2011/12/22)

1. G を位数 36 の群とする。

   (1) $p = 2, 3$ について G のシロー p-部分群の位数を答えよ。

   (2) $p = 2, 3$ について G のシロー p-部分群の個数の可能性について、シローの定理から分かる範囲で答えよ。

2. G を位数 21 の群とする。

   (1) G のシロー 7-部分群は G の正規部分群であることを示せ。

   (2) G の位数 7 の元の個数を求めよ。

3. G を位数 56 の群とする。G のシロー 2-部分群、または G のシロー 7-部分群は G の正規部分群となることを示せ。

4. $G = \langle x \mid x^6 = 1 \rangle = \{1 = x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ について、次の問いに答えよ。

   (1) G のシロー 2-部分群 P とシロー 3-部分群 Q を求めよ。

   (2) $G = P \times Q$ であることを示せ。

5. H, K を有限群とし $G = H \times K$ とする。G の元は (h, k)、ただし $h \in H$, $k \in K$ と書くことができる。(h, k) の位数は h の位数と k の位数の最小公倍数になることを示せ。

6. $H \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$, $H \cap K = 1$ とする。このとき H の任意の元と K の任意の元は可換になることを、交換子 $[h, k] = hkh^{-1}k^{-1}$ $(h \in H,\, k \in K)$ を考えることによって示せ。

7. p, q を相異なる素数とする。$|G| = p^a q^b$ であり、G のシロー p-部分群 P とシロー q-部分群 Q は共に G の正規部分群であるとする。このとき $G = P \times Q$ であることを示せ。

8. $C_6 \times C_4 \cong C_{12} \times C_2$ であることを示せ。ただし C_n は位数 n の有限巡回群を表すものとする。

9. C_4 と $C_2 \times C_2$ は同型ではないことを示せ。

群論演習 (第十二回 2012/01/05)

1. G を位数 28 の群とする。

   (1) $p = 2, 7$ について G のシロー p-部分群の位数を答えよ。

   (2) $p = 2, 7$ について G のシロー p-部分群の個数の可能性について、シローの定理から分かる範囲で答えよ。

2. $G = \langle x \mid x^{10} = 1 \rangle$ とする。G のシロー 2-部分群とシロー 5-部分群を求めよ。また G のシロー 3-部分群は何かを答えよ。

3. 位数 10 の二面体群

$$G = D_{10} = \langle x, y \mid x^5 = y^2 = 1,\ yx = x^4 y \rangle$$

   を考える。

   (1) $p = 2, 5$ について G のシロー p-部分群の個数の可能性について、シローの定理から分かる範囲で答えよ。

   (2) $p = 2, 5$ について G のシロー p-部分群の個数を求めよ。

   (3) G には位数 1, 2, 5, 10 の元がいくつあるか、それぞれ答えよ。

   (4) G の共役類を求めよ。

4. C_n で位数 n の有限巡回群を表すものとする。

   (1) $C_2 \times C_2$ の部分群をすべて求めよ。

   (2) 素数 p について $C_p \times C_p$ の部分群の個数を求めよ。

5. (1) $\varphi : G \to H, \psi : G \to K$ を準同型とする。このとき $\tau : G \to H \times K$ を $\tau(g) = (\varphi(g), \psi(g))$ で定めれば τ も準同型になることを示せ。

   (2) $\varphi : H \to G, \psi : K \to G$ を準同型とする。このとき $\tau : H \times K \to G$ を $\tau(h, k) = \varphi(h)\psi(k)$ で定めても τ は準同型になるとは限らない。このような例を具体的に示せ。また、どのような条件があれば τ が準同型になるかを考察せよ。

群論演習 (第十三回 2012/01/12)

1. G を位数 80 の群とする。

   (1) $p = 2, 5$ について G のシロー p-部分群の位数を答えよ。

   (2) $p = 2, 5$ について G のシロー p-部分群の個数の可能性について、シローの定理から分かる範囲で答えよ。

2. 位数 27, 100 の有限アーベル群をそれぞれ分類せよ。

3. A をアーベル群とする。$T = \{a \in A \mid o(a) < \infty\}$ とおくと T は A の部分群であることを示せ。

4. H を有限群 G の正規部分群とする。p を素数とし $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ とする。$P \subset H$ ならば、任意の $Q \in \mathrm{Syl}_p(G)$ について $Q \subset H$ となることを示せ。

5. G, H を有限群とし、$|G|$ と $|H|$ は互いに素であるものとする。K を直積 $G \times H$ の部分群とする。このとき $K = (K \cap G) \times (K \cap H)$ となることを示せ。ただし G, H は自然な方法で $G \times H$ の部分群であると考えることとする。

6. 問 5 で、$|G|$ と $|H|$ が互いに素でないならば、$K = (K \cap G) \times (K \cap H)$ は一般に成り立たない。このような例を作れ。

7. $f : G \to H$ を準同型とする。$A \leq H$ とするとき $f^{-1}(A) \leq G$ となることを示せ。また $A \trianglelefteq H$ ならば $f^{-1}(A) \trianglelefteq G$ となることも示せ。

8. 置換 $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 7)(6\ 8)(9\ 11)(10\ 12)$, $\tau = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)(8\ 9\ 10)$ を考え、σ と τ で生成される 12 次の置換群 $G = \langle \sigma, \tau \rangle$ を考える。$|G| = 95040$ となることが知られている (この群は 12 次の **Mathieu 群**と呼ばれ M_{12} という記号で表される)。

   (1) G は $\Omega = \{1, 2, \cdots, 12\}$ に可移に作用することを確認せよ。

   (2) $1 \in \Omega$ の安定化部分群 G_1 の位数を求めよ。

群論演習 (第十四回 2012/01/19)

1. G をアーベル群とし n を自然数とする。$H = \{a^n \mid a \in G\}$ は G の部分群であることを示せ。

2. G を群とし、$H \leq G, N \trianglelefteq G$ とする。このとき $|HN| = |H| \cdot |N|/|H \cap N|$ であることを示せ。(N が正規部分群でなくてもこれは成り立つが、その場合は HN が部分群であるとは限らず、証明はやや難しい。自信があればやってみるとよいだろう。)

3. G を群とし $H = \mathrm{Aut}(G)$ を G の自己同型群とする。集合としての直積 $G \times H$ に以下のように積を定義すれば、これは群になることを示せ。

$$(g, \sigma)(h, \tau) = (g\sigma(h), \sigma\tau), \quad g, h \in G,\ \sigma, \tau \in H$$

(H から $\mathrm{Aut}(G)$ への準同型があれば、それを用いて同様に群が定義される。このような群を G と H の半直積といい $G \rtimes H$ と書く。)

4. 位数 35 の群は巡回群であることを示せ。

5. 位数 120 の群のシロー部分群について、シローの定理から分かることを述べよ。

6. 位数 120 のアーベル群を分類せよ。

7. G を群とする。$x, y \in G$ に対して $y = g^{-1}xg$ となる $g \in G$ が存在するとき、x と y は共役であるという。共役であるという関係は G 上の同値関係であることを示せ。

8. 二面体群 $D_8 = \langle x, y \mid x^4 = y^2 = 1,\ yx = x^3y \rangle$ の共役類を求め、類等式を書け。

9. (1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ をみたす自然数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。
   (2) ちょうど 3 つの共役類をもつ群の位数の可能性について考察せよ。((1) を用いて類等式を考える。)