群論・筆答レポート問題 (第一回 2012/11/27)

1. G を群とし $a \in G$ とする。このとき $H = \{g \in G \mid ag = ga\}$ は G の部分群であることを示せ。[5 点]

2. 5 次対称群 S_5 の部分群 $G = \langle (1\ 2\ 3)(4\ 5), (2\ 3) \rangle$ の元をすべて書け。[5 点]

3. 置換
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 8 & 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$
を共通の数を含まない巡回置換の積に分解し、更にその位数を求めよ。[5 点]

4. G, H を群とし Y を H の部分群とする。また $f : G \to H$ を群準同型とする。このとき $f^{-1}(Y)$ は G の部分群であることを示せ。[5 点]

5. G, H を群とし $f : G \to H$ を群準同型とする。このとき

   (1) $f(1_G) = 1_H$

   (2) $g \in G$ に対して $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$

   を示せ。[5 点]

6. G, H を群とし $f : G \to H$ を群準同型とする。$K = \mathrm{Ker} f$ とおく。このとき
$$\overline{f} : G/K \to H, \quad \overline{f}(gK) = f(g)$$
が矛盾なく定義され、更に群準同型となることを示せ。[5 点]

7. n を自然数とし $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を加法群と見る。$f : \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ を $f(a + 10\mathbb{Z}) = 6a + 15\mathbb{Z}$ で定める。

   (1) f が矛盾なく定義され、群準同型であることを示せ。[5 点]

   (2) f の核と像を求めよ。[5 点]

8. G を群、N を G の正規部分群とする。$g \in G$ と $n \in N$ に対して ${}^g n = gng^{-1}$ とすると、これは G の N への左からの作用となることを示せ。[5 点]

9. n を自然数とし $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ を単位元をもつ環と見て、$U(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})$ はその単数群を表すものとする。

   (1) $U(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})$ を求めよ (答えのみでよい)。[5 点]

   (2) $a + 10\mathbb{Z} \in U(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})$ と $x + 10\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ に対して $(a + 10\mathbb{Z})(x + 10\mathbb{Z}) = ax + 10\mathbb{Z}$ とすることで $U(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ に作用する。この作用の軌道をすべて求めよ。[5 点]

   (3) (2) の作用について $2 + 10\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ の安定化部分群を求めよ。[5 点]

[60 点満点]