

## 群論・筆答レポート問題 (第二回 2013/01/22)

1.  $f: G \rightarrow H$  を群の準同型とする。  $A \leq H$  ならば  $f^{-1}(A) \leq G$  であることを示せ。 [5 点]
2.  $f: G \rightarrow H$  を群の全準同型とする。  $N \trianglelefteq G$  ならば  $f(N) \trianglelefteq H$  であることを示せ。 [5 点]
3.  $f: \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$  を  $f(a + 24\mathbb{Z}) = 6a + 16\mathbb{Z}$  で定める。 [5 点  $\times$  2]
  - (1)  $f$  が矛盾なく定義されること、および加法群としての準同型となることを示せ。
  - (2)  $f$  の核と像を求めよ。
4.  $G = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3) \rangle$  を 4 次対称群  $S_4$  の部分群とし、  $G$  の  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  への左からの自然な作用を考える。このとき  $1 \in X$  の安定化部分群  $G_1$  を求めよ。 [5 点]
5.  $G$  を位数 12 の群とする。 [5 点  $\times$  3]
  - (1)  $G$  のシロー 2-部分群の位数を答えよ。またシロー 2-部分群の個数の可能性をシローの定理から分かる範囲で答えよ。
  - (2)  $G$  のシロー 3-部分群の位数を答えよ。またシロー 3-部分群の個数の可能性をシローの定理から分かる範囲で答えよ。
  - (3)  $P \in \text{Syl}_2(G)$ ,  $Q \in \text{Syl}_3(G)$  とするとき、  $P \trianglelefteq G$  または  $Q \trianglelefteq G$  となることを示せ。
6. 以下の位数のアーベル群をそれぞれ分類せよ。 [5 点  $\times$  2]
  - (1) 16
  - (2) 225
7.  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  の単数群  $U(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$  は乗法に関してアーベル群である。  $U(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$  の元を列挙し、そのアーベル群としての構造を決定せよ。 [5 点]
8.  $G$  を有限群とし  $|G| = mn$ ,  $m$  と  $n$  は互いに素であるとする。  $H \trianglelefteq G$ ,  $K \trianglelefteq G$ ,  $|H| = m$ ,  $|K| = n$  とするとき、  $G = H \times K$  であることを示せ。 [5 点]

[60 点満点]