群論問題集 [20110527]

1 群

1. G を群とする。$a, b \in G$ に対して $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ とおいて、これを a と b の**交換子**という。$ab = ba$ であることと $[a,b] = 1$ であることは同値であることを示せ。

2. G を群とする。$a, b, g \in G$ に対して $g^{-1}[a,b]g = [g^{-1}ag, g^{-1}bg]$ であることを示せ。

3. G を群とし $g \in G$ の位数 $n = o(g)$ は有限であるとする。自然数 m について、$g^m = 1$ であることと $n \mid m$ であることは同値であることを示せ。

4. G を群とし $g \in G$ の位数 $n = o(g)$ は有限であるとする。自然数 i に対して $o(g^i)$ を求めよ。

1.1 置換と対称群

ここでは、置換の積は右の置換が先に作用するものとする。すなわち $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$ である。

5. 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ。
   (1) σ を共通の数字を含まない巡回置換の積として表せ。
   (2) σ の位数を求めよ。

6. $\sigma = (1\ 2\ 3)$, $\tau = (1\ 2)$, $\mu = (1\ 4)$ とする。
   (1) $\sigma\tau$ を計算せよ。
   (2) σ^{-1} を求めよ。
   (3) $\sigma\tau\sigma^{-1}$, $\sigma\mu\sigma^{-1}$ を求めよ。

7. 置換 σ, τ に対して $\sigma\tau\sigma^{-1}$ はどのような置換になるかを答えよ。(問 6 (3) が例となっている。)

8. 巡回置換 $(1\ 2\ \cdots\ n)$ を互換の積として表せ。

9. 任意の置換はいくつかの互換の積として表すことが出来ることを示せ。

10. $S = \{(1\ 2),\ (2\ 3), \cdots,\ (n-1\ n)\}$ とする。
    (1) 互換 $(a\ b)$ $(1 \le a < b \le n)$ を S に含まれる互換の積として表せ。
    (2) 任意の置換は S に含まれる互換の積として表すことが出来ることを示せ。

11. 変数 $x_1, \cdots, x_n$ に関する多項式 $f(x_1, \cdots, x_n)$ と n 次の置換 σ に対して $(\sigma f)(x_1, \cdots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$ と定める。
    (1) 置換 σ, τ に関して $\sigma(\tau f) = (\sigma\tau)f$ であることを示せ。
    (2) $\Delta = \prod_{1 \le i < j \le n}(x_i - x_j)$ を**差積**という。互換 σ に対して $\sigma\Delta = -\Delta$ であることを示せ。

12. 置換は、それが偶数個の互換の積で表されるときに**偶置換**、奇数個の互換の積で表されるときに**奇置換**と呼ばれる。偶置換 σ に対して $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$、奇置換 σ に対して $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ として sgn を定める。sgn が矛盾なく定義されていることを示せ。($\mathrm{sgn}(\sigma)$ を σ の**符号**という。)

13. 4 次の偶置換をすべて書け。

14. $n \le 7$ のとき、対称群 S_n は位数 15 の元をもたないことを示せ。また $n \ge 8$ ならば S_n は位数 15 の元をもつことを示せ。

1.2 部分群

15. G を群とし H, K をその部分群とする。このとき $H \cap K$ も G の部分群であることを示せ。

16. G を群とし $a \in G$ とする。$C_G(a) = \{g \in G \mid ag = ga\}$ とおく。このとき $C_G(a)$ は G の部分群であることを示せ。($C_G(a)$ を a の G における**中心化群**という。)

17. G を群とし A を G の部分集合とする。$C_G(A) = \{g \in G \mid$ 任意の $a \in A$ に対して $ag = ga\}$ とおく。このとき $C_G(A)$ は G の部分群であることを示せ。(特に $C_G(G)$ を G の**中心**といい $Z(G)$ と書く。)

18. G を群とし A を G の部分集合とする。$N_G(A) = \{g \in G \mid Ag = gA\}$ とおく。このとき $N_G(A)$ は G の部分群であることを示せ。($N_G(A)$ を A の G における**正規化群**という。)

19. G を群とし H, K をその部分群とする。$HK = KH$ が成り立つならば HK は G の部分群であることを示せ。

20. n 次対称群 S_n について、$H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\}$ は S_n の部分群であることを示せ。

21. A をアーベル群とし $n \in \mathbb{N}$ とする。

    (1) $H = \{a \in A \mid a^n = 1\}$ は A の部分群であることを示せ。

    (2) $K = \{a^n \mid a \in A\}$ は A の部分群であることを示せ。

22. p を素数、e を自然数とする。有限群 G の位数が p^e であるならば、G には位数 p の元が存在することを示せ。(位数が素数 p のべきであるような群を p-**群**という。)

23. 位数 n の有限巡回群の部分群をすべて決定せよ。

24. $G = \{1, a, b, c\}$ とし、演算を

	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

    で定める。このとき G は群である。(これを**クラインの四元群**という。) G の部分群をすべて求めよ。

25. 3 次対称群 S_3 の部分群をすべて決定せよ。

26. G を群とし $H \trianglelefteq G, K \trianglelefteq G, H \cap K = 1$ とする。このとき、任意の $h \in H, k \in K$ に対して $hk = kh$ が成り立つことを示せ。

27. G を群とし A をその部分集合とする。A で生成される G の部分群 $\langle A \rangle$ の定義を述べよ。

28. 位数が素数である有限群は巡回群であることを示せ。

29. G を群とする。G の空でない部分集合 A が G の部分群であるとは

    (a) $x, y \in A$ ならば $xy \in A$

    (b) $x \in A$ ならば $x^{-1} \in A$

    の二つの条件が成り立つことである。

    (1) (a) が成り立つが部分群ではないような例を示せ。

    (2) (b) が成り立つが部分群ではないような例を示せ。

1.3 剰余類と剰余群

30. G を 3 次対称群 S_3 とする。

    (1) $H = \langle (1\ 2) \rangle$ として、G の H による右剰余類分解と左剰余類分解を求めよ。

    (2) $K = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$ として、G の K による右剰余類分解と左剰余類分解を求めよ。

31. G を位数 8 の二面体群 $D_8 = \langle x, y \mid x^4 = y^2 = 1,\ yx = x^3 y \rangle$ とする。

    (1) $H = \langle x \rangle$ として、G の H による右剰余類分解と左剰余類分解を求めよ。

    (2) $K = \langle y \rangle$ として、G の K による右剰余類分解と左剰余類分解を求めよ。

32. 加法群 $\mathbb{Z}$ を考える。$n \in \mathbb{N}$ を一つ固定する。

(1) $n\mathbb{Z} = \{n\ell \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{Z}$ の部分群であることを示せ。

(2) $\mathbb{Z}$ の $n\mathbb{Z}$ による剰余類分解を求めよ。

33. H を群 G の部分群とする。$\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を G の H による左剰余類の完全代表系とするとき、$\{(x_\lambda)^{-1} \mid \lambda \in \Lambda\}$ は G の H による右剰余類の完全代表系となることを示せ。

34. G を群とする。G の中心 $Z(G)$ による剰余群 $G/Z(G)$ が巡回群であるならば G はアーベル群であることを示せ。(したがってこのとき $G = Z(G)$ となる。)

35. G を群とし、N をその正規部分群であるとする。G/N がアーベル群であるならば、任意の $a, b \in G$ について、その交換子 $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ は N に含まれることを示せ。また、逆に、任意の $a, b \in G$ について、その交換子 $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ が N に含まれるならば、G/N はアーベル群になることを示せ。

36. G を群とする。G のすべての交換子で生成される G の部分群を $D(G)$ と書いて G の**交換子群**という。すなわち $D(G) = \langle [a, b] \mid a, b \in G \rangle$ である。$D(G)$ は、剰余群がアーベル群になる G の正規部分群のうち、最小のものであることを示せ。

群論問題集 [20110527]

2　群準同型

2.1　群準同型

1. G, H を群とする。写像 $f : G \to H$ が群準同型であることの定義を答えよ。

2. $f : G \to H$ を群準同型とする。

   (1) $f(1_G) = 1_H$ であることを示せ。

   (2) $a \in G$ に対して $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ であることを示せ。

3. $f : G \to H$ を群準同型とする。$a \in G$ は位数 $o(a)$ が有限の元とする。このとき $o(f(a)) \mid o(a)$ であることを示せ。

4. N を群 G の正規部分群とする。このとき $f : G \to G/N,\ f(g) = gN$ は群準同型であることを示せ。

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0},\ f(r) = e^r$ は加法群 $\mathbb{R}$ から乗法群 $\mathbb{R}_{>0}$ への群準同型であることを示せ。ただし e は自然対数の底、$\mathbb{R}_{>0} = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ である。

6. $f : G \to H$ を群準同型とする。

   (1) A が G の部分群ならば $f(A)$ は H の部分群になることを示せ。(特に $A = G$ とすると $f(G) = \mathrm{Im}\ f$ は H の部分群である。)

   (2) B が H の部分群ならば $f^{-1}(B)$ は G の部分群であることを示せ。

   (3) B が H の正規部分群ならば $f^{-1}(B)$ は G の正規部分群であることを示せ。(特に $B = 1$ とすると $f^{-1}(1) = \mathrm{Ker}\ f$ は G の正規部分群である。)

   (4) A が G の正規部分群であっても $f(A)$ は H の正規部分群であるとは限らないことを示せ。

7. $f : G \to H$ を群準同型とし $N = \mathrm{Ker}\ f$ とする。A が G の部分群ならば $f^{-1}(f(A)) = AN$ であることを示せ。

8. $f : G \to H$ を群準同型とし B を H の部分群とする。このとき $f(f\ {-1}(B)) = B$ とは限らないことを示せ。

9. $f : G \to H$ を群準同型とし N を $\mathrm{Ker}\ f$ に含まれる G の正規部分群とする。このとき $\overline{f} : G/N \to H, \overline{f}(gN) = f(g)$ が矛盾なく定義され、群準同型となることを示せ。

10. $G = \langle a \rangle$ を位数 m の有限巡回群、$H = \langle b \rangle$ を位数 n の有限巡回群とする。

    (1) 群準同型 $f : G \to H$ は $f(a)$ のみで決定されることを示せ。

    (2) 群準同型 $f : G \to H$ が定義されるための $f(a)$ に関する条件を求めよ。

11.

12.

2.2　準同型定理と同型定理

13.

14. $F = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, 1, \cdots, p-1\}$ を p-元体とする。$\mathrm{GL}_n(F)$ は F 上 n 次の正則行列全体からなる乗法群であるとする。これを F 上 n 次**一般線形群**という。($\mathrm{GL}_n(F)$ を $\mathrm{GL}_n(p)$ と書くこともある。)

    (1) $\mathrm{GL}_n(F)$ の位数を求めよ。

    (2) $\mathrm{SL}_n(F) = \{A \in \mathrm{GL}_n(F) \mid \det(A) = 1\}$ とおく。$\mathrm{SL}_n(F)$ は $\mathrm{GL}_n(F)$ の正規部分群であることを示せ。($\mathrm{SL}_n(F)$ を F 上 n 次**特殊線形群**という。$\mathrm{SL}_n(F)$ を $\mathrm{SL}_n(p)$ と書くこともある。)

    (3) $\mathrm{SL}_n(F)$ の位数を求めよ。

    (4) $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in F \right\}$ とくと H は G の部分群であることを示せ。また H の位数を求めよ。

群論問題集 [20110527]

3 群の作用

断らない限り群の作用は右からとする。

1. 集合 X に群 G が (右から) 作用することの定義を述べよ。
2. 群 G は集合 X に作用するとする。$g \in G$ に対して写像 $f : X \to X$ を $f(x) = xg$ で定めれば f は全単射になることを示せ。
3. 群 G は集合 X に作用するとする。$x \in X$ に対して $G_x = \{g \in G \mid xg = x\}$ とおく。このとき G_x は G の部分群であることを示せ。(G_x を G における x の**安定化部分群**という。)
4. 群 G は集合 X に作用するとする。$x \in X, g \in G$ について $G_{xg} = g^{-1}G_x g$ であることを示せ。
5. 群 G は集合 X に作用するとする。$x \in X$ とする。$g, h \in G$ について、$xg = xh$ であることと $G_x g = G_x h$ であることは同値であることを示せ。
6. 群 G は集合 X に作用するとする。$x, y \in X$ に対して、ある $g \in G$ があって $y = xg$ となるときに $x \sim y$ として、X 上の関係 $\sim$ を定める。$\sim$ が同値関係であることを示せ。
7. 群 G は集合 X に作用するとする。問 6 の同値関係による同値類を X の G**-軌道**という。$x \in X$ を含む同値類を xG と表す。$xG = \{xg \mid g \in G\}$ である。$f : G_x \backslash G \to xG$ を $f(G_x g) = xg$ とする。
   (1) f が矛盾なく定義されることを示せ。
   (2) f が全単射であることを示せ。

   (これによって $|xG| = |G : G_x|$ であることが分かる。$|xG|$ を軌道の**長さ**という。$|G| < \infty$ のとき、軌道の長さは $|G|$ の約数である。)
8. 群 G が集合 X に作用するとき、G の部分群 H も G における作用で X に作用することを示せ。
9. 一般に n 次対称群 S_n は集合 $X = \{1, s, \cdots, n\}$ に自然に左から作用する。

   $\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$ とおいて、H を σ で生成される S_6 の巡回部分群とする。このとき H は $X = \{1, s, \cdots, 6\}$ に左から作用する。X を H-軌道に分解せよ。
10. $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$, $\tau = (2\ 3)(5, 6)$ とおいて、H を σ と τ で生成される S_6 の部分群とする。このとき H は $X = \{1, s, \cdots, 6\}$ に左から作用する。X を H-軌道に分解せよ。
11. G を有限群とする。$a, b \in G$ に対して $b = g^{-1}ag$ となるとき $a \sim b$ として、関係 $\sim$ を定める。
    (1) $\sim$ は G 上の同値関係であることを示せ。
    (2) $\sim$ による同値類を G の**共役類**という。G の共役類 C について $|C|$ は $|G|$ の約数であることを示せ。
    (3) $C_1, \cdots, C_r$ を G の共役類のすべてであるとする。このとき $|G| = |C_1| + \cdots + |C_r|$ が成り立つことを示せ。(これを G の**類等式**という。)
12. 3 次対称群 S_3 の共役類をすべて求め、類等式を書け。
13. 位数 8 の二面体群 D_8 (§1 問 31 参照) の共役類をすべて求め、類等式を書け。
14. 共役類をちょうど 3 つもつ群の位数は 6 以下であることを示せ。

群論問題集 [20110527]

4　シローの定理

1. 位数 24 の群のシロー部分群の位数と、その個数の可能性についてシローの定理から分かる範囲で答えよ。
2. 位数 120 の群のシロー部分群の位数と、その個数の可能性についてシローの定理から分かる範囲で答えよ。
3. 位数 15 の群のシロー部分群の位数と、その個数の可能性についてシローの定理から分かる範囲で答えよ。
4. p, q を素数とし $p < q$, $q \not\equiv 1 \pmod p$ とする。位数 pq の群のシロー p-部分群とシロー q-部分群はそれぞれただ一つであることを示せ。
5. G を有限群で、その位数が素数 p で割り切れるものとする。このとき G は位数 p の元を含むことを示せ。
6.
7. G を有限群とし $H \trianglelefteq G$ とする。$P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ とし $P \leq H$ と仮定する。このとき $G = HN_G(P)$ であることを示せ。($N_G(P)$ については 1. 問 18 参照。)
8.

5　群の直積

1.

2.

群論問題集 [20110527]

6　有限生成アーベル群の基本定理

1. 位数 12 のアーベル群を分類せよ。
2. 位数 100 のアーベル群を分類せよ。
3. p を素数とし G を有限アーベル p-群とする。$\Omega(G) = \{x \in G \mid x^p = 1\}$ とおく。
   (1) $\Omega(G)$ は G の部分群であることを示せ。
   (2) H を G の部分群とするとき、$H = 1$ であることと $H \cap \Omega(G) = 1$ であることは同値であることを示せ。

群論問題集・解答例と解説 [20110527]

1　群

1. $ab = ba \iff [a,b] = aba^{-1}b^{-1} = 1$ である。

2. 単なる計算による。

$$\begin{aligned} g^{-1}[a,b]g &= g^{-1}aba^{-1}b^{-1}g = (g^{-1}ag)(g^{-1}bg)(g^{-1}a^{-1}g)(g^{-1}b^{-1}g) \\ &= (g^{-1}ag)(g^{-1}bg)(g^{-1}ag)^{-1}(g^{-1}bg)^{-1} = [g^{-1}ag, g^{-1}bg] \end{aligned}$$

である。

3.
   - $n \mid m$ とする。$m = n\ell$ となる自然数 ℓ が存在する。このとき $g^m = (g^n)^\ell = 1^\ell = 1$ である。
   - $g^m = 1$ とする。$m = nq + r$ となる $n, r \in \mathbb{Z}$ で $0 \le r < n$ となるものがある。このとき $g^r = g^{m-nq} = g^m(g^nq)^{-1} = 1$ となる。位数の定義から $r = 0$ でなければならない。したがって $n \mid m$ である。

4. $d = gcd(n,i)$ とおくと、$o(g^i) = n/d$ である。以下で、これを示す。
   $d = gcd(n,i)$ なので $n = dn'$, $i = di'$ となる $n', i' \in \mathbb{N}$ が存在する。
   - $(g^i)^{(n/d)} = g^{di'n'} = (g^n)^{i'} = 1$ である。よって問 3 より $o(g^i) \mid n/d$ である。特に $o(g^i) \le n/d$ である。
   - $0 < \ell < n/d$ に対して $(g^i)^\ell = 1$ と仮定する。問 3 より、$n \mid i\ell$ である。このとき d で割って $n' \mid i'\ell$ である。最大公約数の性質から n' と i' は互いに素なので $n' \mid \ell < n'$ となる。これは矛盾なので、このような ℓ は存在せず、$o(g^i) = n/d$ となる。

1.1　置換と対称群

5. (1) $\sigma = (1\ 3\ 2\ 7)(4\ 6\ 5)$
   (2) 置換の位数は共通の数字を含まない巡回置換の積に書いたときの、各巡回置換の長さの最小公倍数となる。したがってこの場合は 4 と 3 の最小公倍数なので $o(\sigma) = 12$ である。

6. (1) $(1\ 3)$
   (2) $(1\ 3\ 2)$
   (3) $\sigma\tau\sigma^{-1} = (2\ 3)$, $\sigma\mu\sigma^{-1} = (2\ 4)$

7. $\tau = (a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1r_1})\cdots(a_{s1}\ \cdots a_{sr_s})$ と共通部分のない巡回置換の積に書いたとすると

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(a_{11})\ \sigma(a_{12})\ \cdots\ \sigma(a_{1r_1}))\cdots(\sigma(a_{s1})\ \cdots\sigma(a_{sr_s}))$$

   となる。実際、

$$(\sigma\tau\sigma^{-1})(\sigma(a_{ij}) = \sigma\tau(a_{ij}) = \sigma(a_{i,j+1})$$

   が成り立っている。 ただし $j = r_i$ のときは $a_{i,j+1} = a_{i1}$ と考える。

8. 表し方は色々とあるが、例えば $(1\ 2\ \cdots\ n) = (n-1\ n)(n-2\ n)\cdots(2\ n)(1\ n)$ である。

9. 問 8 より、巡回置換は互換の積としてかける。任意の置換はいくつかの巡回置換の積としてかけるので、互換の積として書ける。

10. (1) $(a\ b) = (b-1\ b)(b-2\ b-1)\cdots(a+1\ a+2)(a\ a+1)(a+1\ a+2)\cdots(b-2\ b-1)(b-1\ b)$
    (2) (1) より任意の互換が S に含まれる互換の積で書けるので、問 9 より、任意の置換は S に含まれる互換の積として表すことが出来る。

11. (1)
    (2)

12.

13. (), (1 2 3), (1 3 2), (1 2 4), (1 4 2), (1 3 4), (1 4 3), (2 3 4), (2 4 3), (1 2)(3 4), (1 3)(2 4), (1 4)(2 3) (12 個)

14.
   - $n = 1$ のとき、置換の型は $[1]$ のみで、その位数は 1
   - $n = 2$ のとき、置換の型は $[2], [1,1]$ で、その位数は $2, 1$

- $n=3$ のとき、置換の型は $[3],[2,1],[1,1,1]$ で、その位数は $3,2,1$
- $n=4$ のとき、置換の型は $[4],[3,1],[2,2],[2,1,1],[1,1,1,1]$ で、その位数は $4,3,2,2,1$
- $n=5$ のとき、置換の型は $[5],[4,1],[3,2],[3,1,1],[2,2,1],[2,1,1,1],[1,1,1,1,1]$ で、その位数は $5,4,6,3,2,2,1$
- $n=6$ のとき、置換の型は $[6]$, $[5,1]$, $[4,2]$, $[4,1,1]$, $[3,3]$, $[3,2,1]$, $[3,1,1,1]$, $[2,2,2]$, $[2,2,1,1]$, $[2,1,1,1,1]$, $[1,1,1,1,1,1]$ で、その位数は $6,5,4,4,3,6,3,2,2,2,1$
- $n=7$ のとき、置換の型は $[7]$, $[6,1]$, $[5,2]$, $[5,1,1]$, $[4,3]$, $[4,2,1]$, $[4,1,1,1]$, $[3,3,1]$, $[3,2,2]$, $[3,2,1,1]$, $[3,1,1,1,1]$, $[2,2,2,1]$, $[2,2,1,1,1]$, $[2,1,1,1,1,1]$ $[1,1,1,1,1,1,1]$ で、その位数は 7, 6, 10, 5, 12, 4, 4, 3, 6, 6, 3, 2, 2, 2, 1

したがって $n\le 7$ には位数 15 の元はない。

$n\ge 8$ のときは $[5,3,1,\cdots,1]$ の位数が 15 となる。

1.2 部分群

15. $1_G\in H\cap K$ より $H\cap K\neq\emptyset$ である。

    $x,y\in H\cap K$ とする。$x,y\in H$ で H は部分群なので $xy^{-1}\in H$ である。また $x,y\in K$ で K は部分群なので $xy^{-1}\in K$ である。したがって $xy^{-1}\in H\cap K$ である。よって $H\cap K$ は G の部分群である。

16.
    - $a1_G=a=1_Ga$ より $1_G\in C_G(a)$ となり $C_G(a)\neq\emptyset$ である。
    - $x,y\in C_G(a)$ とする。$ax=xa$, $ay=ya$ が成り立つ。よって $a(xy)=(ax)y=(xa)y=x(ay)=x(ya)=(xy)a$ となり $xy\in C_G(a)$ である。
    - $x\in C_G(a)$ とする。$ax=xa$ である。この式の両辺に両側から x^{-1} をかけると $x^{-1}a=ax^{-1}$ となる。よって $x^{-1}\in C_G(a)$ である。

    以上より $C_G(a)$ は G の部分群である。

17.
    - 任意の $a\in A$ に対して $a1_G=a=1_Ga$ となるので $1_G\in C_G(A)$ となり $C_G(A)\neq\emptyset$ である。
    - $x,y\in C_G(A)$ とする。$a\in A$ とする。$ax=xa$, $ay=ya$ が成り立つ。よって $a(xy)=(ax)y=(xa)y=x(ay)=x(ya)=(xy)a$ となる。これが任意の $a\in A$ について成り立つので $xy\in C_G(A)$ である。
    - $x\in C_G(A)$ とする。$a\in A$ とする。$ax=xa$ である。この式の両辺に両側から x^{-1} をかけると $x^{-1}a=ax^{-1}$ となる。これが任意の $a\in A$ について成り立つので $x^{-1}\in C_G(A)$ である。

    以上より $C_G(A)$ は G の部分群である。

18.
    - $A1_G=A=1_GA$ より $1_G\in N_G(A)$ となり $N_G(A)\neq\emptyset$ である。
    - $x,y\in N_G(A)$ とする。$Ax=xA$, $Ay=yA$ が成り立つ。よって $A(xy)=(Ax)y=(xA)y=x(Ay)=x(yA)=(xy)A$ となり $xy\in N_G(A)$ である。
    - $x\in N_G(A)$ とする。$Ax=xA$ である。この式の両辺に両側から x^{-1} をかけると $x^{-1}A=Ax^{-1}$ となる。よって $x^{-1}\in N_G(A)$ である。

    以上より $N_G(A)$ は G の部分群である。

19.
    - $1_G=1_G1_G\in HK$ より $HK\neq\emptyset$ である。
    - $x,y\in HK$ とする。ある $h,h'\in H$ と $k,k'\in K$ があって $x=hk$, $y=h'k'$ である。このとき $xy=hkh'k'$ である。ここで $kh'\in KH=HK$ なので、ある $h''\in H$ と $k''\in K$ があって $kh'=h''k''$ となる。よって $xy=hkh'k'=hh''k''k'\in HK$ である。
    - $x\in HK$ とする。ある $h\in H$ と $k\in K$ があって $x=hk$ である。このとき $x^{-1}=k^{-1}h^{-1}\in KH=HK$ である。

    以上より HK は G の部分群である。

    [別解]. H, K は部分群なので $H^{-1}=H$, $HH=H$, $K^{-1}=K$, $KK=K$ が成り立つ。よって $(HK)(HK)^{-1}=HKK^{-1}H^{-1}=HKKH=HKH=HHK=HK$ となり HK は G の部分群である。

20.
    - S_n の単位元 $()$ について $()(1)=1$ なので $()\in H$ となり $H\neq\emptyset$ である。
    - $\sigma,\tau\in H$ とする。$(\sigma\tau)(1)=\sigma(\tau(1))=\sigma(1)=1$ なので $\sigma\tau\in H$ である。
    - $\sigma\in H$ とする。$\sigma(1)=1$ である。両辺の $\sigma^{-1}\in S_n$ による値を考えれば $1=\sigma^{-1}(1)$ となる。よって $\sigma^{-1}\in H$ である。

    以上より H は S_n の部分群である。

21. (1) まず $1^n = 1$ なので $1 \in H$ であり $H \neq \emptyset$ である。$a, b \in H$ とする。このとき A がアーベル群なので $(a^{-1}b)^n = (a^{-1}b)\cdots(a^{-1}b) = (a^{-1})^n b^n = (a^n)^{-1}b^n = 1^{-1}1 = 1$ である。よって $a^{-1}b \in H$ となる。以上より H は A の部分群である。

(2) まず $1 = 1^n$ なので $1 \in K$ であり $K \neq \emptyset$ である。$a, b \in K$ とする。ある $x, y \in A$ があって $a = x^n$, $b = y^n$ となる。このとき A がアーベル群なので $a^{-1}b = (x^n)^{-1}y^n = (x^{-1})^n y^n = (x^{-1}y)\cdots(x^{-1}y) = (x^{-1}y)^n$ となる。よって $x^{-1}y \in K$ となり K は A の部分群である。

22. $1 \neq x \in G$ とする。x の位数 $o(x)$ は $|G| = p^e$ の約数であるから $o(x) = p^f$ となる非負整数 f がある。ここで $f = 0$ ならば $o(x) = 1$ となり $x = 1$ である。よって $f \leq 1$ である。このとき $o(x^{f-1}) = p$ である。

23.

24. $|G| = 4$ であるから、部分群 H の位数の可能性は 1, 2, 4 である。$|H| = 1$ のときは $H = \{1\}$、$|H| = 4$ のときは $H = G$ である。$|H| = 2$ のとき、H は単位元 1 を含むので、その可能性は $H = \{1, a\}$, $\{1, b\}$, $\{1, c\}$ のみであり、またこれらが実際に部分群となっている。

したがって G の部分群は

$$\{1\},\ \{1, a\},\ \{1, b\},\ \{1, c\},\ \{1, a, b, c\}$$

の 5 個である。

25. $|S_3| = 6$ であるから、部分群 H の位数の可能性は 1, 2, 3, 6 である。$|H| = 1$ のときは $H = \{()\}$、$|H| = 6$ のときは $H = G$ である。

- $\underline{|H| = 2 \text{ のとき}}$：$H$ は単位元以外に一つだけ元 x を含む。$x^2 = ()$ でないと $\{(), x\}$ は部分群にならないので、$H = \{(), (1\ 2)\}$, $\{(), (1\ 3)\}$, $\{(), (2\ 3)\}$ である。
- $\underline{|H| = 3 \text{ のとき}}$：$H$ が位数 2 の元を含めば H は位数 2 の部分群をもつことになり矛盾が生じる。H の元で位数が 2 でないものは $()$, $(1\ 2\ 3)$, $(1\ 3\ 2)$ の 3 個だけで、実際 $\{(),\ (1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2)\}$ は S_3 の部分群になる。

したがって S_3 の部分群は

$$\{()\},\ \{(), (1\ 2)\},\ \{(), (1\ 3)\},\ \{(), (2\ 3)\},\ \{(),\ (1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2)\},\ S_3$$

の 6 個である。

26. $h \in H, k \in K$ とする。交換子 $[h, k] = hkh^{-1}k^{-1}$ を考える。$H \trianglelefteq G$ より $hkh^{-1}k^{-1} = h(kh^{-1}k^{-1}) \in H(kHk^{-1}) = HH = H$ である。同様に $K \trianglelefteq G$ より $hkh^{-1}k^{-1} = (hkh^{-1})k^{-1}) \in (hKh^{-1})K = KK = K$ である。よって $hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K = 1$ となり $hkh^{-1}k^{-1} = 1$ である。したがって $hk = kh$ となる。

27. 「G の部分群のうち A を含むものすべての共通部分」である。「A を含む G の部分群のうち、最小のもの」ということもできる。(二つ目の定義を採用するときは、最小のものが存在することを示さなくてはならない。)

28.

29.

1.3 剰余類と剰余群

30.

31.

32.

33. $a \in G$ とする。$G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda H$ なので、ある $\mu \in \Lambda$ があって $a^{-1} \in x_\mu H$ となる。このとき $a \in H(x_\mu)^{-1}$ となる。よって $G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} H(x_\lambda)^{-1}$ である。また $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$ に対して $x_\lambda H \cap x_\mu = \emptyset$ なので、$H(x_\lambda)^{-1} \cap H(x_\mu)^{-1} = (x_\lambda H \cap x_\mu H)^{-1} = \emptyset$ である。したがって $\{(x_\lambda)^{-1} \mid \lambda \in \Lambda\}$ は G の H による右剰余類の完全代表系となる。

34.

35.

36. 問 2 より $g^{-1}[a, b]g = [g^{-1}ag, g^{-1}bg]$ なので、$D(G)$ は G の正規部分群になる。また問 35 より $G/D(G)$ はアーベル群である。

N を G/N がアーベル群となる G の正規部分群とすると、問 35 より N は $D(G)$ を含む。

よって $D(G)$ は、剰余群がアーベル群になる G の正規部分群のうち、最小のものである。

群論問題集・解答例と解説 [20110527]

2 群準同型

2.1 群準同型

1. 任意の $a, b \in G$ に対して $f(ab) = f(a)f(b)$ となること。

2. (1) $f(1_G) = f(1_G \cdot 1_G) = f(1_G)f(1_G)$ が成り立つ。この式の両辺に右から $f(1_G)^{-1}$ をかければ $1_H = f(1_G)$ となる。

   (2) $a \in G$ とする。$1_H = f(1_G) = f(aa^{-1}) = f(a)f(a^{-1})$ である。同様にして $1_H = f(a^{-1})f(a)$ も成り立つので $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ である。

3. $f(a)^{o(a)} = f(a^{o(a)}) = f(1) = 1$ なので $o(f(a)) \mid o(a)$ である。

4. $g, h \in G$ に対して $f(gh) = (gh)N = (gN)(hN) = f(g)f(h)$ なので f は準同型である。

5. $f(r_1 + r_2) = e^{r_1+r_2} = e^{r_1}e^{r_2} = f(r_1)f(r_2)$ なので、f は準同型である。

6. (1)
   - $A \neq \emptyset$ より $f(A) \neq \emptyset$ である。
   - $x, x' \in f(A)$ とする。ある $a, a' \in A$ があって $f(a) = x, f(a') = x'$ となる。このとき $x^{-1}x' = f(a)^{-1}f(a') = f(a^{-1})f(a') = f(a^{-1}a')$ である。A は部分群なので $a^{-1}a' \in A$ となり $x^{-1}x' \in f(A)$ である。

   よって $f(A)$ は H の部分群である。

   (2)
   - $1_H \in B$ で $f(1_G) = 1_H$ なので、$1_G \in f^{-1}(B)$ となり $f^{-1}(B) \neq \emptyset$ である。
   - $x, y \in f^{-1}(B)$ とする。$f(x) \in B, f(y) \in B$ である。このとき、B が部分群なので $f(x^{-1}y) = f(x^{-1})f(y) = f(x)^{-1}f(y) \in B$ である。

   よって $f^{-1}(B)$ は G の部分群である。

   (3) $f^{-1}(B)$ が G の部分群であることは (2) で示した。$x \in f^{-1}(B), g \in G$ とする。$f(x) \in B$ である。このとき B は H の正規部分群なので $f(g^{-1}xg) = f(g)^{-1}f(x)f(g) \in f(g)^{-1}Bf(g) = B$ である。よって $g^{-1}xg \in f^{-1}(B)$ となり、$f^{-1}(B)$ は G の正規部分群である。

   (4) 反例を示せばよい。G を群 H の正規部分群ではない部分群とする。(例えば 3 次対称群の位数 2 の部分群とする。) $f : G \to H$ を埋込みとする。このとき $G \trianglelefteq G$ であるが $f(G) = G$ は H の正規部分群ではない。

7. $\supset$) $x \in AN$ とする。ある $a \in A$ と $n \in N$ があって $x = an$ である。このとき $f(x) = f(an) = f(a)f(n) = f(a) \in f(A)$ である。よって $x \in f^{-1}(f(A))$ である。

   $\subset$) $y \in f^{-1}(f(A))$ とする。$f(y) \in f(A)$ である。よって、ある $a \in A$ があって $f(y) = f(a)$ となる。このとき $1_H = f(a)^{-1}f(y) = f(a^{-1}y)$ であるから $a^{-1}y \in N$ である。したがって $y = a(a^{-1}y) \in AN$ である。

   以上より $f^{-1}(f(A)) = AN$ が成り立つ。

8. 反例を示せばよい。$H \neq 1$ とする。$f : G \to H$ を $f(g) = 1_H$ で定めれば、これは群準同型である。このとき、H の部分群として H 自身を考えれば $f^{-1}(H) = G$ であるから、$f(f^{-1}(H)) = f(G) = 1 \neq H$ である。

9.
   - $gN = g'N$ とする。ある $n \in N$ があって $g' = gn$ となる。このとき $n \in N \subset \mathrm{Ker}\ f$ より $f(g') = f(gn) = f(g)f(n) = f(g)$ である。よって $\overline{f}$ は定義される。
   - $gN, g'N \in G/N$ に対して、$\overline{f}((gN)(g'N)) = \overline{f}((gg'N)) = f(gg') = f(g)f(g') = \overline{f}(gN)\overline{f}(g'N)$ が成り立ち、$\overline{f}$ は準同型である。

10. (1) 群準同型を定めるには、$0 \leq i < m$ について $f(a^i)$ が決まればよい。f が群準同型であるならば $f(a^i) = f(a)^i$ なので、f は $f(a)$ のみで決まる。

    (2) $f : G \to H$ を $f(a^i) = f(a)^i$ で定めれば、これが任意の $x, y \in G$ に対して $f(xy) = f(x)f(y)$ をみたすのは明らかである。f が矛盾なく定義されるための条件を考える。
    - f が定義されているとする。$a^i = a^j$ とする。$i \leq j$ と仮定しても一般性を失わない。このとき $f(a)^i = f(a^i) = f(a^j) = f(a)^j = f(a)^i f(a)^{j-i}$ が成り立ち、よって $f(a)^{j-i} = 1$ でなくてはならない。特に $f(a)^m = 1$ である。
    - 逆に $f(a)^m = 1$ とする。このとき $a^i = a^j$ ならば $j = i + m\ell$ となる $\ell \in \mathbb{Z}$ が存在する。よって $f(a)^j = f(a)^i f(a)^m \ell = f(a)^i$ となる。したがって f は矛盾なく定義される。

    以上のことより f が定義されるための条件は $f(a)^m = 1$ である。

11.

12.

2.2 準同型定理と同型定理

13.

14. (1)

- 行列が正則であるということは、その行ベクトルの集合が一次独立であるということである。
- 第 1 行のみに注目すれば、それは零ベクトルでなければよい。よって $(p^n - 1)$ 通りの取り方がある。
- 第 1 行が零ベクトルでないとする。第 2 行が第 1 行と一次独立になるためには、第 1 行のスカラー倍でなければよい。よって、第 1 行が固定されていると考えれば $(p^n - p)$ 通りの取り方がある。
- 第 1 行、第 2 行が一次独立であるとする。第 1 行、第 2、第 3 行が一次独立になるためには、第 3 行が第 1 行、第 2 行の張る空間に含まれなければよい。よって $(p^n - p^2)$ 通りの取り方がある。
- 同様にして、第 1 行から第 k 行が一次独立であるとき、第 $(k+1)$ 行の取り方は $(p^n - p^k)$ 通りある。
- 以上を合わせると正則行列は $\prod_{i=0}^{n-1}(p^n - p^i)$ 個ある。よって $|\mathrm{GL}_n(F)| = \prod_{i=0}^{n-1}(p^n - p^i)$ である。

(2)

- 単位行列は $\mathrm{SL}_n(F)$ に含まれるので $\mathrm{SL}_n(F) \neq \emptyset$ である。
- $A, B \in \mathrm{SL}_n(F)$ とする。$\det(A^{-1}B) = \det(A^{-1})\det(B) = \det(A)^{-1}\det(B) = 1$ なので $\mathrm{SL}_n(F)$ は $\mathrm{GL}_n(F)$ の部分群である。
- $A \in \mathrm{SL}_n(F)$, $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ とすると、$\det(P^{-1}AP) = \det(P)^{-1}\det(A)\det(P) = 1$ となるので $P^{-1}AP \in \mathrm{SL}_n(F)$ となる。よって $\mathrm{SL}_n(F)$ は $\mathrm{GL}_n(F)$ の正規部分群である。

[**別解**] 写像 $\det : \mathrm{GL}_n(F) \to F^\times = F - \{0\}$ を考える。$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ なので det は準同型である。このとき $\mathrm{SL}_n(F) = \mathrm{Ker}\ \det$ となるので $\mathrm{SL}_n(F)$ は $\mathrm{GL}_n(F)$ の正規部分群である。

(3) 写像 $\det : \mathrm{GL}_n(F) \to F^\times = F - \{0\}$ は準同型である ((2) 別解参照)。また $0 \neq a \in F$ に対して、単位行列の $(1,1)$-成分を a に置き換えた行列 A を考えれば、$a \in \mathrm{GL}_n(F)$ で $\det(A) = a$ となる。よって det は全射である。$\mathrm{SL}_n(F) = \mathrm{Ker}\ \det$ であるから

群論問題集・解答例と解説 [20110527]

3 群の作用

1. 集合 X に群 G が右から作用するとは、次の三つの条件が成り立つことである。
   - 写像 $X \times G \to X$ $((x,g) \mapsto xg)$ が定義されている。
   - 任意の $x \in X$ に対して $x1_G = x$ である。
   - 任意の $x \in X$ と $g, h \in G$ に対して $x(gh) = (xg)h$ である。

2. 写像 $h : X \to X$ を $h(x) = xg^{-1}$ で定める。このとき $x \in X$ に対して $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(xg^{-1}) = (xg^{-1})g = x(g^{-1}g) = x1_G = x$, $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(xg) = (xg)g^{-1} = x(gg^{-1}) = x1_G = x$ が成り立つ。よって $f \circ h = h \circ f = id_X$ が成り立ち f は全単射である。

3.
   - $x1_G = x$ なので $1_G \in G_x$ となり $G_x \neq \emptyset$ である。
   - $g, h \in G_x$ とする。このとき $x(gh) = (xg)h = xh = x$ なので $gh \in G_x$ である。
   - $g \in G_x$ とする。$xg = x$ である。両辺に g^{-1} を作用させて $x = xg^{-1}$ となる。よって $g^{-1} \in G_x$ である。

   以上より G_x は G の部分群である。

4. $\subset$) $a \in G_{xg}$ とする。$(xg)a = xg$ である。両辺に g^{-1} を作用させれば $x(gag^{-1}) = x$ となる。よって $gag^{-1} \in G_x$ である。したがって $a \in g^{-1}G_xg$ となり $G_{xg} \subset g^{-1}G_xg$ である。

   $\supset$) $b \in g^{-1}G_xg$ とする。ある $c \in G_x$ があって $b = g^{-1}cg$ となる。このとき $(xg)b = (xg)g^{-1}cg = (xc)g = xg$ である。よって $b \in G_{xg}$ となり $G_{xg} \supset g^{-1}G_xg$ である。

   以上より $G_{xg} = g^{-1}G_xg$ である。

5.
   - $xg = xh$ とする。$x(gh^{-1}) = x$ である。よって $gh^{-1} \in G_x$ となり $G_xg = G_xh$ である。
   - $G_xg = G_xh$ とする。ある $a \in G_x$ があって $h = ag$ である。このとき $xh = (xa)g = xg$ となる。

6.

7.

8.
   - G が X に作用することから写像 $f : X \times G \to X$ が与えられている。$X \times H$ は $X \times G$ の部分集合と見ることができるので f を $X \times H$ に制限して、写像 $f' : X \times H \to X$ が得られる。
   - H の単位元は G の単位元と一致するので、任意の $x \in X$ に対して $x1_H = f'(x, 1_H) = f(x, 1_G) = x$ である。
   - $x \in X$, $h, h' \in H$ に対して、$h, h' \in G$ と見れば $x(hh') = f'(x, hh') = f(x, hh') = f(f(x,h), h') = f'(f'(x,h), h') = (xh)h'$ が成り立つ。

9. $X = \{1,2,3\} \cup \{4,5\} \cup \{6\}$

10. $X = \{1,2,3,4\} \cup \{5,6\}$

11. G の G への右からの作用を $x^g = g^{-1}xg$ で定めることができる。問題の同値関係は、この作用から得られる同値関係に一致している。
    (1) 問 6 による。
    (2) 共役類はこの作用による軌道である。$x \in C$ に対して安定化部分群は $C_G(x) = \{g \in G \mid g^{-1}xg = x\}$ (中心化群) である。よって $|C| = |G : C_G(x)|$ は $|G|$ の約数となる。
    (3) 共役類への分解は同値関係による類別なので、明らかである。

12.

13.

14. $C_1 = \{1\}$, C_2, C_3 を群 G の共役類のすべてであるとする。また $c_i = |C_i|$ とする。このとき c_i は $|G|$ の約数である。$1 = c_1 \leq c_2 \leq c_3$ と仮定して構わない。$a_i = |G|/c_i (\in \mathbb{N})$ とおく。$c_1 = 1$ なので $a_1 = |G|$ である。このとき、類等式は $|G| = c_1 + c_2 + c_3$ となる。両辺を $|G|$ で割れば

$$1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}$$

である。これをみたす自然数の組は

$$(a_1, a_2, a_3) = (3, 3, 3),\ (4, 2, 2),\ (6, 3, 2)$$

しかないことが分かるので、$|G| = 3, 4, 6$ しか可能性はない。よって $|G| \leq 6$ である。
(実際には $|G| = 4$ となることはない。$|G| = 3$ のときは位数 3 の巡回群、$|G| = 6$ のときは 3 次対称群となる。)

群論問題集・解答例と解説 [20110527]

4　シローの定理

1. まず $24 = 2^3 \times 3$ なので $p = 2, 3$ 以外の素数については、シロー p-部分群の位数は 1 で、個数も 1 である。

    - $p = 2$ について
    シロー 2-部分群の位数は $2^3 = 8$ である。その個数は $2k+1$ の形の数、すなわち奇数である。またシロー 2-部分群を P とすると、個数は $|G : N_G(P)|$ である。$P \leq N_G(P) \leq G$ から $|G : N_G(P)| = |G : P|/|N_G(P) : P| = 3/|N_G(P) : P|$ である。よって、シロー 2-部分群の個数は 1, 3 のいずれかとなる。
    - $p = 3$ について
    シロー 3-部分群の位数は 3 である。その個数は $3k+1$ の形の数である。また、上と同様の議論から、個数は 8 の約数となる。8 の約数で $3k+1$ の形の数は 1, 4 のみである。よって、シロー 3-部分群の個数は 1, 4 のいずれかとなる。

2. まず $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ なので $p = 2, 3, 5$ 以外の素数については、シロー p-部分群の位数は 1 で、個数も 1 である。

    - $p = 2$ について
    シロー 2-部分群の位数は $2^3 = 8$ である。その個数は $2k+1$ の形の数、すなわち奇数である。またシロー 2-部分群を P とすると、個数は $|G : N_G(P)|$ である。$P \leq N_G(P) \leq G$ から $|G : N_G(P)| = |G : P|/|N_G(P) : P| = 15/|N_G(P) : P|$ である。よって、シロー 2-部分群の個数は 1, 3, 5, 15 のいずれかとなる。
    - $p = 3$ について
    シロー 3-部分群の位数は 3 である。その個数は $3k+1$ の形の数である。また、上と同様の議論から、個数は 40 の約数となる。40 の約数で $3k+1$ の形の数は 1, 4, 10, 40 である。よって、シロー 3-部分群の個数は 1, 4, 10, 40 のいずれかとなる。
    - $p = 5$ について
    シロー 5-部分群の位数は 5 である。その個数は $5k+1$ の形の数である。また、上と同様の議論から、個数は 24 の約数となる。24 の約数で $5k+1$ の形の数は 1, 6 のみである。よって、シロー 5-部分群の個数は 1, 6 のいずれかとなる。

3. まず $15 = 3 \times 5$ なので $p = 3, 5$ 以外の素数については、シロー p-部分群の位数は 1 で、個数も 1 である。

    - $p = 3$ について
    シロー 3-部分群の位数は 3 である。その個数は $3k+1$ の形の数、すなわち奇数である。またシロー 3-部分群を P とすると、個数は $|G : N_G(P)|$ である。$P \leq N_G(P) \leq G$ から $|G : N_G(P)| = |G : P|/|N_G(P) : P| = 5/|N_G(P) : P|$ である。よって、シロー 3-部分群の個数は 1 である。
    - $p = 5$ について
    シロー 5-部分群の位数は 5 である。その個数は $5k+1$ の形の数である。また、上と同様の議論から、個数は 3 の約数となる。3 の約数で $5k+1$ の形の数は 1 である。よって、シロー 5-部分群の個数は 1 となる。

4. G を位数 pq の群とする。$P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ とする。$|\mathrm{Syl}_p(G)| = |G : N_G(P)|$ であり、$|G : N_G(P)|$ は $|G : P| = q$ の約数である。よって $|\mathrm{Syl}_p(G)|$ は 1 または q であり、また $|\mathrm{Syl}_p(G)| \equiv \pmod p$ なので仮定より $q \not\equiv 1 \pmod p$ なので $|\mathrm{Syl}_p(G)| = 1$ である。同様にして $|\mathrm{Syl}_q(G)|$ は 1 または p であるが、$p < q$ より $p \not\equiv 1 \pmod q$ である。よって $|\mathrm{Syl}_q(G)| = 1$ である。

5. G のシロー p-部分群を P とすれば、仮定から $P \neq 1$ である。このとき §1 問 22 より P は位数 p の元を含む。

6.

7. $g \in G$ とする。位数を考えれば P は H のシロー p-部分群でもある。$P^g \leq H^g = H$ であるから、P^g も H のシロー p-部分群でもある。よってシローの定理より $P^g = P^h$ となる $h \in H$ が存在する。このとき $P^{gh^{-1}} = P$ より $gh^{-1} \in N_G(P)$ である。よって $g \in hN_G(P) \subset HN_G(P)$ である。したがって $G \subset HN_G(P)$ である。

    $G \supset HN_G(P)$ は明らかなので $G = HN_G(P)$ である。

8.

5　群の直積

1.

2.

6 有限生成アーベル群の基本定理

1.

2.

3. (1) §1 問 21 (1) と同じ。

   (2) $H = 1$ ならば $H \cap \Omega(G) = 1$ であることは明らかである。$H \neq 1$ とする。このとき §4 問 5 より H は位数 p の元を含むので $H \cap \Omega(G) \neq 1$ である。