# 代数入門中間試験 (2005/6/6)

**[各 5 点、合計 60 点]**

1. $A$ をモノイドとする。$A$ の単位元は唯一つであることを示せ。

2. $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ に以下のように演算 (乗法) を定義する。

$$(a,b)(c,d)=(ac,ad+bc)$$

   (1) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ はこの演算で可換半群であることを示せ。

   (2) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ のこの演算についての単位元を求め、したがってモノイドであることを示せ。

   (3) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ のこの演算についての単数群を求めよ。

3. $n\in\mathbb{N}$ を固定する。$a\in\mathbb{Z}$ に対して $a+n\mathbb{Z}=\{a+nx\mid x\in\mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{a+n\mathbb{Z}\mid a\in\mathbb{Z}\}$ とおく。

   (1) $(a+n\mathbb{Z})+(b+n\mathbb{Z})=(a+b)+n\mathbb{Z}$ とすることで $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に演算 (加法) が矛盾なく定義できることを示せ。

   (2) $m\in\mathbb{N}$ についても同様に $a+m\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ を定義する。このとき $f(a+m\mathbb{Z})=a+n\mathbb{Z}$ で写像 $f:\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が矛盾なく定義できるための必要十分条件を $m,n$ に関する条件として書け。

4. $G$, $H$ を群とし写像 $f:G\to H$ は任意の $a,b\in G$ に対して $f(ab)=f(a)f(b)$ を満たすとする。

   (1) 任意の $a\in G$ に対して $f(a^{-1})=f(a)^{-1}$ であることを示せ。

   (2) $f(G)=\{f(a)\mid a\in G\}$ は $H$ の部分群であることを示せ。

   (3) $K=\{a\in G\mid f(a)=1\}$ は $G$ の部分群であることを示せ。

5. $G$ を群とする。$a,b\in G$ に対して $a\sim b$ であることを「ある $x\in G$ があって $b=x^{-1}ax$ となる」で定義する。このとき $\sim$ は $G$ 上の同値関係であることを示せ。

6. 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ において

$$A=(1,1),\ B=(-1,1),\ C=(-1,-1),\ D=(1,-1)$$

   とする。正方形 $ABCD$ を考え、それをそれ自身に移すような変換全部のなす群を $G$ とする。これは $\{A,B,C,D\}$ 上の置換の集合と考えられる。

   (1) $G$ の元をすべて書け。

   (2) 前問の同値関係 $\sim$ をこの $G$ について考え、その同値類をすべて求めよ。