

代数入門 (中間試験 2007/6/4)

1. 以下のようなものの例を、具体的にそれぞれ一つ示せ。ただし、意味がはっきりと分かるようになるべく正確に書くこと。[各 5 点]
 - (1) 結合法則をみたさない二項演算。
 - (2) 半群であるがモノイドではないもの。
 - (3) モノイドであるが群ではないもの。
 - (4) 非可換な群。
2. \mathbb{R} を実数全体の集合とする。 $S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に $(a, b)(c, d) = (ac, ad + bc)$ で乗法を定める。[各 5 点]
 - (1) この乗法が結合法則をみたすことを示せ。
 - (2) この演算に関する単位元を求めよ。また (a, b) が正則元 (単元、単数) であるための必要十分条件を a, b に関する条件として表せ。
 - (3) (a, b) が正則元であると仮定し、その逆元を求めよ。
3. A を (乗法を演算とする) モノイドとし、 $a \in A$ を正則元とする。写像 $f: A \rightarrow A$ を $f(x) = ax$ で定める。[各 5 点]
 - (1) f は単射であることを示せ。
 - (2) f は全射であることを示せ。
4. G を群とする。 $x, y \in G$ に対して、ある $g \in G$ があって $y = gxg^{-1}$ であるときに $x \sim y$ と定めることによって、 G 上の関係 \sim を定める。このとき \sim は同値関係であることを示せ。[5 点]
5. G を群、 H をその部分群とする。 $x, y \in G$ に対して、 $x^{-1}y \in H$ であるときに $x \approx y$ と定めることによって、 G 上の関係 \approx を定める。このとき \approx は同値関係であることを示せ。[5 点]
6. G を群とし $a \in G$ とする。 $H = \{g \in G \mid g^{-1}ag = a\}$ とおくと、 H は G の部分群であることを示せ。[5 点]

[5 点 \times 12 問 = 60 点満点]