

代数入門 (中間試験 2008/6/2)

1. 以下のものの定義を書け。[5 点 × 3]

- (1) 二項演算。
- (2) モノイド。
- (3) 群。

2. \mathbb{R} を実数全体の集合とする。 $S = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に

$$(a, b, c)(d, e, f) = (ad, be, cd + bf)$$

で乗法を定める。[5 点 × 3]

- (1) この乗法が結合法則をみたすことを示せ。
 - (2) この演算に関する単位元を求めよ。
 - (3) (a, b, c) が正則元 (単元、単数) であるための必要十分条件を a, b, c に関する条件として表し、その逆元を求めよ。
3. G を群とし $a \in G$ とする。写像 $f : G \rightarrow G$ を $f(x) = ax$ で定める。このとき f は全単射であることを示せ。[5 点]
4. M をモノイド、 U をその単数群 (単元群) とする。 $a, b \in M$ に対して $au = b$ なる $u \in U$ が存在するときに $a \sim b$ として、 M 上の関係 \sim を定める。このとき \sim は M 上の同値関係であることを示せ。[5 点]
5. G を複素数を成分とする 2 次正方行列全体の集合のなす、乗法を演算とする群とする。 H を G の元で、その行列式が 1 であるもの全体のなす集合とする。このとき H は G の部分群であることを示せ。[5 点]
6. G を群、 H を G の部分群とし、 $N = \{g \in G \mid g^{-1}Hg = H\}$ とおく。[5 点 × 2]
- (1) N は G の部分群であることを示せ。
 - (2) $x, y \in G$ について、 $x^{-1}Hx = y^{-1}Hy$ であることと $xy^{-1} \in N$ であることは同値である。これを示せ。
7. 位数が素数である有限群は巡回群であることを示せ。[5 点]

[5 点 × 12 問 = 60 点満点]