代数入門・中間試験 (2009/06/04)

1. 群の定義を書け。(なるべく詳しく正確に書くこと。) [5 点]

2. 以下のようなものの例を、具体的にそれぞれ一つ示せ。ただし、意味がはっきりと分かるようになるべく正確に書くこと。[5 点 × 2]

   (1) 結合法則をみたさない二項演算。

   (2) 半群であるがモノイドではないもの。

3. $\mathbb{R}$ を実数全体の集合とする。$S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に $(a, b)(c, d) = (ad + bc, bd)$ で乗法を定める。[5 点 × 3]

   (1) この乗法が結合法則をみたすことを示せ。

   (2) この演算に関する単位元を求めよ。また (a, b) が正則元 (単元、単数) であるための必要十分条件を a, b に関する条件として表せ。

   (3) (a, b) が正則元であると仮定し、その逆元を求めよ。

4. 有理整数の全体からなる集合 $\mathbb{Z}$ を通常の乗法でモノイドと見る。このときの単数群 (単元群) を求めよ。(答えのみでよい。) [5 点]

5. A を 1_A を単位元とするモノイドとし $a \in A$ とする。$ab = ba = 1_A$ なる b が存在すれば、それはただ一つに定まることを示せ。[5 点]

6. G を群とし H をその部分群とする。$a, b \in G$ に対して、$ab^{-1} \in H$ であるとき $a \sim b$ として、G 上の関係 $\sim$ を定める。このとき $\sim$ は同値関係であることを示せ。[5 点]

7. G を群とし $a \in G$ を一つ固定する。写像 $f : G \to G$ を $f(x) = a^{-1}xa$ で定める。このとき f は全単射であることを示せ。[5 点]

8. G を群とし、任意の $x \in G$ について $x^2 = 1_G$ が成り立つとする。このとき G はアーベル群であることを示せ。[5 点]

9. G を群とし H, K を G の部分群とする。このとき $H \cap K$ も G の部分群であることを示せ。[5 点]

[5 点 × 12 = 60 点満点]