

代数入門・中間試験 (2010/05/31)

1. 半群、モノイド、群の定義をすべて書け。[10 点]
2. A をモノイドとする。 $u \in A$ を正則元とするとき、写像 $f : A \rightarrow A$, $f(x) = ux$ は全単射になることを示せ。[5 点]
3. A をモノイドとする。 $a, b \in A$ に対して、ある A の正則元 u が存在して $b = au$ となるときに $a \sim b$ として、 A 上の関係 \sim を定義する。このとき \sim は同値関係であることを示せ。[5 点]
4. $S = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ とし、

$$(a, b, c)(d, e, f) = (ad, be, bf + cd)$$

で演算を定める。

- (1) この演算が結合法則をみたすことを示せ。[5 点]
 - (2) この演算は交換法則をみたさないことを示せ。[5 点]
 - (3) この演算に関する単位元を求めよ。[5 点]
 - (4) この演算に関して (a, b, c) が正則元になるための条件を求めよ。[5 点]
 - (5) (a, b, c) が正則元であるとき、その逆元を求めよ。[5 点]
5. G を群とし $a \in G$ を一つ固定して考える。 $H = \{g \in G \mid ga = ag\}$ とおくと、 H は G の部分群であることを示せ。[5 点]
 6. G を群とし H, K を G の部分群とする。任意の $h \in H$ に対して $hK = Kh$ が成り立つならば HK は G の部分群であることを示せ。[5 点]
 7. G, H を群とする。写像 $f : G \rightarrow H$ は、任意の $a, b \in G$ に対して $f(ab) = f(a)f(b)$ をみたすものとする。このとき $x \in G$ に対して $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ となることを示せ。[5 点]

[10 点 + 5 点 \times 10 = 60 点満点]