代数入門筆答レポート (第一回 2012/05/28)

1. 以下の条件を満たす例をそれぞれ一つ、具体的に書け。(意味がはっきりと分かるように書くこと。それが条件を満たす理由の説明は不要である。) [3 点 $\times$ 5]

   (1) 半群でありモノイドではないもの　(2) アーベル群ではない群
   (3) モノイドであり群ではないもの　(4) 加法群
   (5) 結合法則をみたさない二項演算

2. モノイド A の正則元 u に対して、その逆元は一意的に定まることを示せ。[5 点]

3. G を群とし $a \in G$ とする。写像 $f : G \to G$ を $f(x) = a^{-1}xa$ で定める。このとき f は全単射であることを示せ。[5 点]

4. $A = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ とし、A に積を $(a, b)(c, d) = (ad + bc, bd)$ で定める。[5 点 $\times$ 2]

   (1) この積が結合法則をみたすことを示せ。

   (2) A の単位元を求めよ。また $(a, b) \in A$ が正則元となるための必要十分条件を a, b に関する条件として書け。

5. G を群とし $a \in G$ とする。$C_G(a) = \{x \in G \mid ax = xa\}$ とおく。$C_G(a)$ は G の部分群であることを示せ。[5 点]

6. G を群とし、H を G の部分群とする。$x, y \in G$ に対して、$xy^{-1} \in H$ であることと $Hx = Hy$ であることは同値であることを示せ。[5 点]

7. G を群とし H を G の部分群とする。$x, y \in G$ に対して、ある $h \in H$ が存在して $y = hx$ となるときに $x \sim y$ として、G 上の関係 $\sim$ を定める。このとき $\sim$ は同値関係であることを示せ。[5 点]

8. n を自然数とし $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{a + n\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ を考える。ただし $a + n\mathbb{Z} = \{a + n\ell \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$ である。[5 点 $\times$ 2]

   (1) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に $(a + n\mathbb{Z})(b + n\mathbb{Z}) = ab + n\mathbb{Z}$ で積を定めることが出来ることを示せ。

   (2) (1) によって $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ はモノイドとなる (証明不要)。$n = 10$ として $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ の単数群を求めよ。

[(3 点 $\times$ 5) + (5 点 $\times$ 9) = 60 点満点]