代数入門筆答レポート (第一回 2013/06/03)

1. 以下のものについて、それが、半群、モノイド、群、そのいずれでもない、のうち、最も適当なものを答えよ。(解答のみでよく、説明は不要である。) [3 点 $\times$ 5]

   (1) (負の数も含めた) 偶数全体の集合で演算として乗法を考えたもの

   (2) (負の数も含めた) 偶数全体の集合で演算として加法を考えたもの

   (3) (負の数も含めた) 奇数全体の集合で演算として乗法を考えたもの

   (4) (負の数も含めた) 奇数全体の集合で演算として加法を考えたもの

   (5) 整数を成分とする 2 次正方行列の全体で演算として乗法を考えたもの

2. A をモノイドとする。$a \in A$ に対して $ba = ac = 1$ となる $b, c \in A$ が存在すれば a は A の正則元であることを示せ。[5 点]

3. n を自然数とする。$a, b \in \mathbb{Z}$ に対して、ある $\ell \in \mathbb{Z}$ が存在して $a - b = n\ell$ となるとき $a \sim b$ として、$\mathbb{Z}$ 上の関係 $\sim$ を定める。

   (1) 関係 $\sim$ が同値関係であることを示せ。[5 点]

   (2) この同値関係について、$a \in \mathbb{Z}$ を含む同値類を $\overline{a}$ と表す。同値類の全体を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と表す。このとき、写像 $f : \mathbb{Z}/nZ \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(f(\overline{a}, \overline{b}) = \overline{a+b})$ が矛盾なく定義できることを示せ。[5 点]

4. 集合 $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に演算を $(a, b, c)(d, e, f) = (ad, ae + bf, cf)$ で定める。

   (1) この演算が結合法則をみたすことを示せ。[5 点]

   (2) 単位元を求め、$(a, b, c) \in A$ が正則となるための条件を求めよ。[5 点]

5. G を群とする。写像 $\xi : G \to G$ $(\xi(x) = x^{-1})$ は全単射であることを示せ。[5 点]

6. 3 次対称群 S_3 の元を全て書け。また S_3 はアーベル群ではないことを示せ。[5 点]

7. n を自然数とする。G をアーベル群とし $H = \{a^n \mid a \in G\}$ とおく。H は G の部分群であることを示せ。[5 点]

8. G を群、H を G の部分群とする。$x, y \in G$ に対して $x^{-1}y \in H$ ならば $xH = yH$ であることを示せ。[5 点]

[(3 点 $\times$ 5) + (5 点 $\times$ 9) = 60 点満点]