代数入門・筆答レポート (第一回 2015/06/01)

1. 群の定義を (なるべく丁寧に) 書け。[5 点]

2. u をモノイド M の正則元とする。このとき、写像 $f: M \to M$ を $f(x) = xu$ で定めれば f は全単射であることを示せ。[5 点]

3. $\mathbb{Z}$ を有理整数全体の集合とし n を自然数とする。$a, b \in \mathbb{Z}$ に対して、ある $\ell \in \mathbb{Z}$ が存在して $a - b = n\ell$ となるとき $a \sim b$ として $\mathbb{Z}$ 上の関係 $\sim$ を定める。

   (1) $\sim$ は同値関係であることを示せ。[5 点]

   (2) $a \in \mathbb{Z}$ を含む $\sim$ による同値類を求めよ。($\sim$ を用いないで記述せよ。) [5 点]

4. $M = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ とし、演算を

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

   で定める。

   (1) M はこの演算でモノイドになることを示せ。[5 点]

   (2) $(a, b) \in M$ が正則元であるための必要十分条件を a, b に関する条件としてなるべく簡潔に書け。またこのときの (a, b) の逆元を求めよ。[5 点]

5. G をアーベル群とする。また n を自然数とする。

   (1) $H = \{x \in G \mid x^n = 1\}$ とおくと、H は G の部分群であることを示せ。[5 点]

   (2) $K = \{x^n \mid x \in G\}$ とおくと、K は G の部分群であることを示せ。[5 点]

6. G を群とし H を G の部分群とする。

   (1) $a, b \in G$ に対して、$Ha = Hb$ ならば $ab^{-1} \in H$ であることを示せ。[5 点]

   (2) $a, b \in G$ に対して、$ab^{-1} \in H$ ならば $Ha = Hb$ であることを示せ。[5 点]

7. $G = \langle x \rangle$ を位数 n の有限巡回群とする。

   (1) m が n の約数であるとき、G は位数 m の部分群をもつことを示せ。[5 点]

   (2) $n = 6$ とする。G の元をすべて書き、その位数をすべて求めよ。[5 点]

[5 点 $\times$ 12 = 60 点満点]