

## 代数入門筆答レポート (第二回 2015/07/27)

- 次の条件をみたす例を書け。[2 問正解で 5 点、1 問なら 2 点]
  - 単位元をもつ可換環であって整域ではないもの。
  - 整域であって体ではないもの。
- $R = M_2(\mathbb{R})$  は実数を成分とする 2 次正方行列の全体からなる環 (全行列環) とする。[5 点  $\times$  3]
  - $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$  は  $R$  の部分環であることを示せ。
  - $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$  は  $S$  のイデアルであることを示せ。
  - $I$  は  $R$  のイデアルではないことを示せ。
- $R$  を可換環とし  $a \in R$  とする。  $N = \{r \in R \mid ar = 0\}$  とすると  $N$  は  $R$  のイデアルであることを示せ。[5 点]
- 単位元をもつ環  $R$  において、正則元は左零因子ではないことを示せ。[5 点]
- 可換環  $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$  の正則元と零因子をすべて答えよ。[5 点]
- $f: \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  を  $f(a + 12\mathbb{Z}) = a + 4\mathbb{Z}$  で定める。[5 点  $\times$  2]
  - $f$  が矛盾なく定義できることを示せ。
  - $f$  の像と核を求めよ。
- 851 と 529 の最大公約数  $d$  を求め、 $851x + 529y = d$  となる整数の組  $(x, y)$  を一組求めよ。[5 点]
- 環  $\mathbb{Z}/258\mathbb{Z}$  において  $91 + 258\mathbb{Z}$  の (乗法に関する) 逆元を求めよ。 ( $0 \leq b < 258$  なる整数  $b$  を用いて  $b + 258\mathbb{Z}$  の形で答えよ。 ) [5 点]
- $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$  の元を係数とする連立一次方程式
$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{4}y = \bar{8} \\ \bar{5}x + \bar{7}y = \bar{4} \end{cases}$$
を解け。ここで、整数  $a$  に対して  $\bar{a} = a + 11\mathbb{Z}$  とする。  $x, y$  は  $0 \leq a, b < 11$  なる整数  $a, b$  を用いて  $x = \bar{a}, y = \bar{b}$  のように答えよ。[5 点]
- $2\sqrt{2} - \sqrt{5}$  を根にもつ有理数係数多項式のうち、次数が最小で、最高次の係数が 1 のもの (最小多項式) を求めよ。[5 点]

[5 点  $\times$  13 = 65 点満点]