

代数入門・筆答レポート (第一回 2018/06/04)

- 群の定義を書け。(不明確な部分がないように気をつけて丁寧に書くこと。)[5点]
- 次のようなものの例を書け。(集合と演算が明確になるように気をつけて書くこと。)[完答 10 点、不正解毎に -3 点、ただし 0 点以下にはしない]
 - モノイドでない半群
 - 群でないモノイド
 - アーベル群でない群
 - アーベル群である無限群
- M をモノイドとする。 $a, b \in M$ に対して $a \sim b$ を「ある M の正則元 u, v が存在して $b = uav$ 」となることで定める。このとき \sim は同値関係であることを示せ。[5点]
- G を群とし $a \in G$ とする。写像 $f: G \rightarrow G$ ($f(g) = a^{-1}ga$) は全単射であることを示せ。[5点]
- G を群とし $a \in G$ とする、 $H = \{x \in G \mid xa = ax\}$ は G の部分群であることを示せ。[5点]
- G を群とし H を G の部分群とする。 $x, y \in G$ に対して $Hx = Hy$ であることと $xy^{-1} \in H$ であることが同値であることを示せ。[5点]
- $A = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ とする。 A に積を
$$(a, b, c)(d, e, f) = (ad, -be, af - ce)$$
で定める。[5点 \times 2]
 - A はこの演算でモノイドになることを示せ。
 - (a, b, c) が正則元になるための必要十分条件を a, b, c の条件として書き、そのときの逆元も求めよ。
- $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の正則元をすべて求めよ。[5点]
- n を自然数とする。 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の加法 $(a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z}) = (a + b) + n\mathbb{Z}$ が矛盾なく定義されることを示せ。[5点]
- m, n を自然数とする。 $G = \langle a \rangle = \{1, a, a^2, \dots, a^{mn-1}\}$ を位数 mn の巡回群とする。このとき G は位数 m の部分群をもつことを示せ。[5点]

[5点 \times 10 + 10点 = 60点満点]