代数入門・筆答レポート (第二回 2018/07/23)

1. d を 19043 と 27661 の最大公約数とする。d を求め、$19043x+27661y=d$ となる整数の組 (x,y) を一つ求めよ。[5 点]

2. $\mathbb{Z}/97\mathbb{Z}$ における $\overline{26}=26+97\mathbb{Z}$ の逆元を求めよ。[5 点]

3. $f(x)=x^3+x+3\in\mathbb{Q}[x],\ g(x)=x^2-1\in\mathbb{Q}[x]$ とする。剰余環 $\mathbb{Q}[x]/f(x)\mathbb{Q}[x]$ における $g(x)+f(x)\mathbb{Q}[x]$ の逆元を求めよ。[5 点]

4. R を環、$I,\ J$ をそのイデアルとする。[5 点 $\times$ 3]

   (1) I が R のイデアルであることの定義を書け。

   (2) $I\cap J$ は R のイデアルであることを示せ。

   (3) 剰余環 $R/I=\{a+I\mid a\in R\}$ の積 $(a+I)(b+I)=ab+I$ が矛盾なく定義されることを示せ。

5. 可換環 $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ の単数 (正則元) をすべて書け。[5 点]

6. 実数体 $\mathbb{R}$ 上の 2 次全行列環 $M_2(\mathbb{R})$ を考える。[5 点 $\times$ 2]

   (1) $S=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の部分環であることを示せ。

   (2) $M_2(\mathbb{R})$ のイデアルは $\{O\}$ と $M_2(\mathbb{R})$ しかないことを示せ。ここで O は零行列である。

7. R を無限個の元を含む整域とする。$f(x)\in R[x]$ に対して、写像 $f^*:R\to R$ を多項式への値の代入 $f^*(\alpha)=f(\alpha)$ と定める。$f(x),g(x)\in R[x]$ に対して $f^*=g^*$ であるならば $f(x)=g(x)$ であることを示せ。[5 点]

8. $m,\ n$ を互いに素な自然数とする。写像 $f:\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を $f(a+mn\mathbb{Z})=(a+m\mathbb{Z},\ a+n\mathbb{Z})$ で定める。[5 点 $\times$ 2]

   (1) f が矛盾なく定義されることを示せ。

   (2) f が全単射であることを示せ。

9. K を標数 $p\ (\neq 0)$ の体とする。$a,b\in K$ に対して $(a+b)^p=a^p+b^p$ が成り立つことを証明せよ。[5 点]

[5 点 $\times$ 13 $=$ 65 点満点]