代数入門・筆答レポート (第二回 2019/07/29)

1. d を 33127 と 29987 の最大公約数とする。$33127x + 29987y = d$ となる整数の組 (x, y) を一組求めよ。[5 点]

2. 環 $\mathbb{Z}/59\mathbb{Z}$ における $\overline{33} = 33 + 59\mathbb{Z}$ の逆元を求めよ。[5 点]

3. $M_2(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上 2 次の全行列環とし、$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ とする。[5 点 × 2]

   (1) S は $M_2(\mathbb{R})$ の部分環であることを示せ。

   (2) S は体であることを示せ。(環であることは示さなくてよい。)

4. $n \in \mathbb{N}$ とする。$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の乗法

$$(a + n\mathbb{Z})(b + n\mathbb{Z}) = ab + n\mathbb{Z}$$

   が矛盾なく定義できることを示せ。[5 点]

5. R を整域とし $a \in R$ とする。ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $a^n = 0$ であるならば $a = 0$ であることを示せ。[5 点]

6. R を整域とし $a, b \in R$ とする。$aR = bR$ であるならば、ある正則元 u が存在して $b = au$ となることを示せ。ただし $aR = \{ar \mid r \in R\}$ である。[5 点]

7. R を可換環とし I を R のイデアルとする。

$$\sqrt{I} = \{a \in R \mid ある\ n \in \mathbb{N}\ に対して\ a^n \in I\}$$

   とおくと、$\sqrt{I}$ は R のイデアルであることを示せ。[5 点]

8. R を可換環とし $a \in R$ とする。写像 $f : R \to R$ を $f(x) = ax$ で定める。このとき $f^{-1}(0)$ は R のイデアルであることを示せ。[5 点]

9. 環 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ のイデアルをすべて書け。(答のみでよい。) [5 点]

10. K を体とし $0 \neq f(x) \in K[x]$ であって、任意の $\alpha \in K$ に対して $f(\alpha) = 0$ となるような例を一つ書け。(答のみでも構わないが、体 K と $f(x)$ を明示すること。) [5 点]

11. 要素の数がちょうど 4 つである体の加法表と乗法表を書け。[5 点]

[5 点 × 12 = 60 点満点]