代数入門・筆答レポート (第一回 2021/06/07)

1. 群の定義をなるべく丁寧に書け。[5 点]

2. M を 1_M を単位元とするモノイドとする。$a, b, c \in M$ について $ba = ac = 1_M$ とすると $b = c$ であることを示せ。[5 点]

3. M をモノイドとする。$a, b \in M$ に対して、$a \sim b$ という関係を「ある正則元 u が存在して $b = au$」となることで定める。このとき $\sim$ は M 上の同値関係であることを示せ。[5 点]

4. $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ を乗法に関するモノイドと見る。[5 点 $\times$ 3]

   (1) 演算表 (乗法表) を書き、単数群 $U(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ を決定せよ。

   (2) 単数群 $U(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ が巡回群であるかどうかを判定せよ。(答のみでなく、理由も書くこと。)

   (3) 単数群 $U(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ の部分群をすべて求めよ。

5. $S = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ とし、S に演算を $(a, b)(c, d) = (ac, ad + bc)$ で定める。[5 点 $\times$ 2]

   (1) この演算が結合法則をみたすことを示し、更に単位元を求めよ。

   (2) $(a, b) \in S$ が正則であるための必要十分条件を答え、またそのときの逆元を求めよ。

6. G を群とし $a \in G$ とする。$C_G(a) = \{x \in G \mid xa = ax\}$ とおく。[5 点 $\times$ 2]

   (1) $C_G(a)$ は G の部分群であることを示せ。

   (2) $xax^{-1} = yay^{-1}$ であることと $x^{-1}y \in C_G(a)$ であることは同値であることを示せ。

7. G を群とし、H, K をその部分群とする。写像 $f : G/H \to G/K$, $f(aH) = aK$ が定義されるための必要十分条件を H, K に関する条件で表わせ。[5 点]

8. G を位数 n の有限群とし m を n と互いに素な自然数とする。写像 $f : G \to G$ を $f(x) = x^m$ で定める。このとき f は全単射であることを示せ。[5 点]

[5 点 $\times$ 12 = 60 点満点]