

## 代数入門・筆答レポート (第二回 2022/07/25)

1.  $a = 2737, b = 1587$  とする。 $a$  と  $b$  の最大公約数  $d$  を求め、 $ax + by = d$  となる整数の組  $(x, y)$  を 1 組求めよ。(解答のみでもよい) [5 点]
2.  $123x \equiv 9 \pmod{177}$  をみたす自然数  $x$  を 1 つ求めよ。(解答のみでもよい) [5 点]
3. 環  $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$  の正則元をすべて答えよ。(解答のみでもよい) [5 点]
4.  $R$  を可換環とし  $a$  を  $R$  の零因子とする。写像  $f: R \rightarrow R, f(x) = ax$  は単射ではないことを示せ。[5 点]
5.  $K$  を体とし  $\alpha \in K$  とする。多項式環  $K[x]$  を考える。 $I = \{f(x) \in K[x] \mid f(\alpha) = 0\}$  とおくと  $I$  は  $K[x]$  のイデアルであることを示せ。[5 点]
6.  $R, S$  を環とする。写像  $f: R \rightarrow S$  は、任意の  $a, b \in R$  に対して

$$f(a + b) = f(a) + f(b), \quad f(ab) = f(a)f(b)$$

をみたすものとする。[5 点  $\times$  3]

- (1)  $f(0_R) = 0_S$  と  $f(-a) = -f(a)$  ( $a \in R$ ) を示せ。
  - (2)  $f(R)$  は  $S$  の部分環であることを示せ。
  - (3)  $f^{-1}(0_S)$  は  $R$  のイデアルであることを示せ。
7.  $R$  を整域とする。0 でない多項式  $f(x) \in R[x]$  の次数を  $n$  とする。 $f(x)$  の根は高々  $n$  個であることを示せ。[5 点]
  8.  $R$  を整域とする。 $S = R - \{0\}$  とする。 $R \times S$  に  $at = bs$  のときに  $(a, s) \sim (b, t)$  として関係  $\sim$  を定める。[5 点  $\times$  2]

- (1) 関係  $\sim$  は同値関係であることを示せ。
- (2)  $(a, s)$  を含む同値類を  $[a, s]$  で表すことにする。商集合  $(R \times S)/\sim$  に次の演算を考える。

$$[a, s] + [b, t] = [at + bs, st]$$

この演算が矛盾なく定義されることを示せ。

9.  $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  とする。 $f(x) = x^2 + ax + b$  ( $a, b \in K$ ) の形の既約多項式 (3 次より小さな次数の 2 つの多項式の積にならない多項式) をすべて求めよ。(解答のみでもよい) [5 点]

[5 点  $\times$  12 = 60 点満点]