

代数入門・筆答レポート (第一回 2023/05/29)

1. 群の定義を (なるべく丁寧に) 書け。[5 点]
2. モノイド M の正則元 u に対して、その逆元はただ一つであることを示せ。[5 点]
3. $S = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ に $(a, b)(c, d) = (ad + c, bd)$ で演算を定める。[5 点 \times 2]
 - (1) S はこの演算でモノイドであることを示せ。
 - (2) (a, b) が正則元になるための a, b に関する条件を求めよ。またそのときの (a, b) の逆元を求めよ。
4. G を群とし $g \in G$ を一つ固定する。写像 $f: G \rightarrow G, f(x) = g^{-1}xg$ は全単射であることを示せ。[5 点]
5. G を群とし $a \in G$ を一つ固定する。 $H = \{g \in G \mid ag = ga\}$ は G の部分群であることを示せ。[5 点]
6. H を群 G の部分群とする。 $a, b \in G$ に対して $a \sim b$ を $a^{-1}b \in H$ となることで定める。[5 点 \times 2]
 - (1) 関係 \sim は G 上の同値関係であることを示せ。
 - (2) $a \in G$ を含む \sim に関する同値類を、意味が明確になるように注意して書け。
7. m, n を自然数とする。 $f: \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, f(a + m\mathbb{Z}) = a + n\mathbb{Z}$ が矛盾なく定義されるための m, n に関する条件を求めよ。(説明も書くこと) [5 点]
8. N を群 G の正規部分群とする。 G/N に積 $(aN)(bN) = (ab)N$ が矛盾なく定義できることを示せ。[5 点]
9. 群 G とその部分群 H と K で $H \cup K$ が G の部分群ではないような例を具体的に書け。(説明不要) [5 点]
10. G, H を群とする。写像 $f: G \rightarrow H$ は、任意の $x, y \in G$ に対して $f(xy) = f(x)f(y)$ をみたすとする。このとき $f(1_G) = 1_H$ であることを示せ。[5 点]

[5 点 \times 12 = 60 点満点]