線形代数学 II・筆答レポート (第二回 2024/01/25)

1. 次の連立一次方程式を解け。 [5 点]

$$\begin{cases} a + 3b + 2c - 3d = 0 \\ 2a + b + c + 2d = -2 \\ a + 2b - c + d = 2 \\ 2a + 4b + c - d = 1 \end{cases}$$

2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ を用いて線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める。[5 点 × 2]

   (1) f の核 $f^{-1}(\mathbf{0})$ と f の像 $f(\mathbb{R}^3)$ の基底を求めよ。

   (2) f の像 $f(\mathbb{R}^3)$ の直交補空間の基底を求めよ。ただし内積は標準内積であるものとする。

3. 次の行列の固有値と各固有値に対する固有空間の基底を求めよ。[5 点 × 2]

   (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とする。[5 点 × 2]

   (1) A の固有値と各固有値に対する固有空間の基底を求めよ。

   (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求め、そのときの $P^{-1}AP$ も答えよ。

5. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ とする。[5 点 × 2]

   (1) A の固有値と各固有値に対する固有空間の基底を求めよ。

   (2) $T^{-1}AT$ が対角行列となるような直交行列 T を求め、そのときの $T^{-1}AT$ も答えよ。

6. 二次形式 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2yz$ のシルベスター標準形を求め、その符号を決定せよ。[5 点]

7. 正方行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ に対して、それらに対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ とする。$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ は一次独立であることを示せ。[5 点]

8. エルミート行列 A の固有値は実数であることを示せ。[5 点]

9. エルミート行列 A の異なる固有値 λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ は (標準内積に関して) 直交することを示せ。[5 点]

10. 実数を成分とする n 次正方行列全体の集合 $M_n(\mathbb{R})$ を通常の加法とスカラー倍で $\mathbb{R}$-ベクトル空間とみる。$A \in M_n(\mathbb{R})$ がある $\ell \in \mathbb{N}$ に対して $A^{\ell-1} \neq O$, $A^\ell = O$ をみたすものとする。このとき $E = A^0, A, A^2, \ldots, A^{\ell-1}$ は一次独立であることを示せ。[5 点]

[5 点 × 14 = 70 点満点]