線形代数学 II・筆答レポート (第二回 2024/01/25) 解答例

1. $(a,b,c,d) = (-1-2s, 1+s, -1+s, s) = (-1,1,-1,0) + s(-2,1,1,1)$ (s は任意の実数)

2. (1) 核 ${}^t(1,-2,1)$, 像 ${}^t(1,1,-1,1), {}^t(0,1,-2,-1)$
   (2) ${}^t(-1,2,1,0), {}^t(-2,1,0,1)$

3. (1) 固有値 $6, -2$
   $\lambda = 6$ に対する固有空間基底 ${}^t(1,1)$
   $\lambda = -2$ に対する固有空間基底 ${}^t(5,-3)$
   (2) 固有値 0 (2 重根)
   $\lambda = 0$ に対する固有空間基底 ${}^t(2,-1)$

4. (1) 固有値 2 (2 重根), 3
   $\lambda = 2$ に対する固有空間基底 ${}^t(-1,1,0), {}^t(-1,0,1)$
   $\lambda = 3$ に対する固有空間基底 ${}^t(0,1,0)$
   (2) $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5. (1) 固有値 -3 (2 重根), 3
   $\lambda = -3$ に対する固有空間基底 ${}^t(-1,1,0), {}^t(1,1,1)$
   $\lambda = 3$ に対する固有空間基底 ${}^t(-1,-1,2)$
   (2) $T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

6. $(x-y+z)^2 + (y+z)^2 - (y-z)^2$, 符号 $(2,1)$

7. 相異なる固有値の数 s に関する帰納法で示す。$s = 1$ のときは $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{v}_1$ は一次独立である。$s > 1$ とし s 未満のときは成り立つと仮定する。$\sum_{i=1}^{s} c_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$ と仮定する。$\boldsymbol{0} = A \sum_{i=1}^{s} c_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{s} c_i \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ である。一方で $\boldsymbol{0} = \lambda_s \sum_{i=1}^{s} c_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{s} c_i \lambda_s \boldsymbol{v}_i$ である。よって $\boldsymbol{0} = \sum_{i=1}^{s-1} c_i(\lambda_i \lambda_s) \boldsymbol{v}_i$ である。帰納法の仮定から $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{s-1}$ は一次独立であるから $c_i(\lambda_i - \lambda_s) = 0$ $(i = 1, \ldots, s-1)$ であり、$\lambda_i \neq \lambda_s$ であるから $c_i = 0$ $(i = 1, \ldots, s-1)$ である。このとき $\boldsymbol{v}_s \neq \boldsymbol{0}$ であるから $c_s = 0$ も成り立つ。よって $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ は一次独立である。

8. $\boldsymbol{x}$ を A の固有値 λ に対する固有ベクトルであるとする。$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ である。一方で A がエルミート行列であるから $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \lambda \boldsymbol{x}) = \overline{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ である。$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ だから $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \neq 0$ であり、よって $\lambda = \overline{\lambda}$、すなわち λ は実数である。

9. 問 7 から λ_1, λ_2 は実数である。$(A\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = (\lambda_1 \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \lambda_1(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ である。一方で A がエルミート行列であるから $(A\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{v}_1, \lambda_2 \boldsymbol{v}_2) = \overline{\lambda_2}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \lambda_2(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ である。$\lambda_1 \neq \lambda_2$ であるから $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = 0$ である。

10. $\sum_{i=0}^{\ell-1} c_i A^i = O$ とする。$A^{\ell-1}$ をかければ $c_0 A^{\ell-1} = O$ であり、$A^{\ell-1} \neq O$ であるから $c_0 = 0$ である。次に $A^{\ell-2}$ をかければ、同様にして $c_1 = 0$ である。同様にこれを繰り返せば $c_0 = \cdots = c_{\ell-1} = 0$ となり $E, A, A^2, \ldots, A^{\ell-1}$ は一次独立である。