線形代数続論筆答レポート (第一回 2014/06/05)

1. A を $m \times n$ 行列、B を $n \times m$ 行列とする。このとき $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ であることを示せ。ただし、正方行列 M に対して $\mathrm{tr}(M)$ はトレース、すなわち対角成分の和、を表すものとする。[5 点]

2. A を n 次正方行列、$\boldsymbol{x}$ を n 次元列ベクトルとする。$A^{\ell}\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, $A^{\ell+1}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ とする。このとき $\boldsymbol{x}$, $A\boldsymbol{x}$, $\cdots$, $A^{\ell}\boldsymbol{x}$ は一次独立であることを示せ。[5 点]

3. 次の連立方程式を解け。[各 5 点]

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & - & 2w & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & z & + & w & = & 8 \\ x & + & y & + & z & + & w & = & 6 \\ -2x & - & y & + & 2z & + & w & = & 3 \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} -6x & + & 3y & - & z & + & 10w & = & 0 \\ -8x & + & 4y & - & 2z & + & 12w & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & - & 2w & = & 0 \\ 4x & - & 2y & + & 3z & - & 2w & = & 0 \end{array} \right.$$

4. 次の行列の逆行列を求めよ。[各 5 点]

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2) \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. $\boldsymbol{a} = (1,1,1,1,1)$, $\boldsymbol{b} = (1,2,1,1,2)$, $\boldsymbol{c} = (0,1,1,1,1)$, $\boldsymbol{d} = (0,0,1,1,0)$ とする。$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ で張られる空間の正規直交基底を求めよ。[5 点]

6. 次の行列の固有値とそれに対する固有空間の基底を求めよ。[各 5 点]

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad (2) \quad \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。[各 5 点]

   (1) A の固有多項式と固有値を求めよ。

   (2) (1) で求めた各固有値に対して、その固有空間の基底をそれぞれ求めよ。

   (3) $T^{-1}AT$ が対角行列となる直交行列 T を求め、そのときの $T^{-1}AT$ も答えよ。

[5 点 $\times$ 12 = 60 点満点]