線形代数続論筆答レポート (第一回 2016/06/02)

1. 次の連立方程式を解け。[5 点]

$$\begin{cases} a + 2b - 2c + d + 3e = 2 \\ 2a + b + 2c + e = 3 \\ -2a - 3b + 2c - d - 4e = -3 \end{cases}$$

2. 次の行列の逆行列を求めよ。[5 点]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

3. $\boldsymbol{u}_1 = (1,-1,-1,1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1,-1,0,2)$, $\boldsymbol{u}_3 = (1,-1,-2,0)$ とし $U = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$ とする。また $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,0,1,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,1,-1,0)$ とし $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ とする。$U+V$ の一組の基底を求めよ。[5 点]

4. A を正方行列とし $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ を A の相異なる固有値、$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ をそれぞれ λ_i に関する固有ベクトルとする。このとき $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ は一次独立であることを示せ。[5 点]

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。[5 点 × 3]
   (1) A の固有多項式と固有値を求めよ。
   (2) (1) で求めた各固有値に対して、その固有空間の基底をそれぞれ求めよ。
   (3) A が対角化可能であるかを判定せよ (その理由も書くこと)。対角化可能であるならば $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求め、そのときの $P^{-1}AP$ も答えよ。

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。[5 点 × 3]
   (1) A の固有多項式と固有値を求めよ。
   (2) (1) で求めた各固有値に対して、その固有空間の基底をそれぞれ求めよ。
   (3) A が対角化可能であるかを判定せよ (その理由も書くこと)。対角化可能であるならば $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求め、そのときの $P^{-1}AP$ も答えよ。

7. 次の行列を直交行列によって対角化せよ。($T^{-1}AT$ が対角行列となるような直交行列 T を求め、そのときの $T^{-1}AT$ も答えよ。) [5 点 × 2]

   (1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

[5 点 × 12 = 60 点満点]