線形代数続論筆答レポート (第二回 2016/07/28)

1. 次の連立方程式の解を求めよ。[5 点]

$$\begin{cases} x + 2y + z + u = -1 \\ 2x + 5y + z + 4u = 3 \\ 3x + 7y + 2z + 5u = 2 \\ x + y + 2z - u = -6 \end{cases}$$

2. 次の行列の逆行列を求めよ。[5 点]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

3. $A = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。[5 点 × 2]

   (1) A の固有値を求め、各固有値に対してその固有空間の基底をそれぞれ求めよ。

   (2) A の Jordan 標準形と、$P^{-1}AP$ が Jordan 標準形となる正則行列 P を求めよ。

4. $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -16 \\ 14 & 3 & -16 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ とする。[5 点 × 2]

   (1) B の固有値を求め、各固有値に対してその固有空間の基底をそれぞれ求めよ。

   (2) B の Jordan 標準形と、$P^{-1}BP$ が Jordan 標準形となる正則行列 P を求めよ。

5. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とする。[5 点 × 2]

   (1) C の固有値を求め、各固有値に対してその固有空間の基底をそれぞれ求めよ。

   (2) C の Jordan 標準形と、$P^{-1}CP$ が Jordan 標準形となる正則行列 P を求めよ。

6. $D = \begin{pmatrix} 4 & -10 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。[5 点 × 2]

   (1) D の固有値を求め、各固有値に対してその固有空間の基底をそれぞれ求めよ。

   (2) D の Jordan 標準形と、$P^{-1}DP$ が Jordan 標準形となる正則行列 P を求めよ。

7. 固有多項式が $(x-2)^4$ であり、最小多項式が $(x-2)^2$ である正方行列 A の Jordan 標準形の可能性をすべて列挙せよ。[5 点]

8. N を $\mathbb{C}$ 上の n 次正方行列とし、$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ とする。ある ℓ があって $N^{\ell-1}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, $N^{\ell}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ であるとする。このとき $\boldsymbol{x}, N\boldsymbol{x}, N^2\boldsymbol{x}, \ldots, N^{\ell-1}\boldsymbol{x}$ は一次独立であることを示せ。[5 点]

[5 点 × 12 = 60 点満点]