線形代数続論・筆答レポート (第一回 2017/06/08)

1. 次の連立方程式を解け。[5 点]

$$\begin{cases} 2a + b + c + d = -1 \\ 5a + 2b + c + 4d = 3 \\ 7a + 3b + 2c + 5d = 2 \\ 2a + 2b + 4c - 2d = -12 \end{cases}$$

2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。[5 点]

3. 行列式 $\begin{vmatrix} 5 & -5 & 0 & -5 \\ -5 & 0 & 5 & 0 \\ 9 & -1 & -7 & 1 \\ 3 & 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ を求めよ。[5 点]

4. $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{u}_2 = (2, -1, 1, -1)$, $\boldsymbol{u}_3 = (1, 1, 2, 1)$ とし $U = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$ とする。また $\boldsymbol{v}_1 = (1, -1, 0, -1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3, -1, 1, -1)$ $\boldsymbol{v}_3 = (2, 0, 1, 0)$ とし $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ とする。[5 点 × 2]

   (1) U の一組の基底を求めよ。

   (2) (1) で求めた U の基底の延長となる $U + V$ の基底を求めよ。

5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とする。[5 点 × 3]

   (1) A の固有多項式と固有値を求めよ。

   (2) (1) で求めた各固有値に対して、その固有空間の基底をそれぞれ求めよ。

   (3) A が対角化可能であるかを判定せよ (その理由も書くこと)。対角化可能であるならば $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求め、そのときの $P^{-1}AP$ も答えよ。

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とする。[5 点 × 3]

   (1) A の固有多項式と固有値を求めよ。

   (2) (1) で求めた各固有値に対して、その固有空間の基底をそれぞれ求めよ。

   (3) $T^{-1}AT$ が対角行列となるような直交行列 T を求め、そのときの $T^{-1}AT$ も答えよ。

7. A を正方行列とし $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を A の相異なる固有値とする。$V(\lambda_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ を λ_i に対する固有空間とする。このとき $(V(\lambda_1) + V(\lambda_2)) \cap V(\lambda_3) = \{\mathbf{0}\}$ であることを示せ。[5 点]

[5 点 × 12 = 60 点満点]