線形代数続論・筆答レポート (第一回 2018/05/31)

1. 次の連立方程式を解け。[5 点]

$$\begin{cases} a + b + c + d = 8 \\ 2a + 3b + 2c + 4d = 7 \\ 3a + 5b + 3c + 7d = 6 \end{cases}$$

2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。[5 点]

3. 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & 6 \\ -2 & -4 & 5 & 8 \\ 2 & -4 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ を求めよ。[5 点]

4. 次の行列 A それぞれに対して下記の問いに答えよ。[5 点 × 4]

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

(1) A の固有値と対応する固有空間の基底を求めよ。

(2) A が対角化可能であるかを判定 (その理由も書くこと) し、対角化可能であるならば $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求め、そのときの $P^{-1}AP$ も答えよ。

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。[5 点 × 2]

(1) A の固有値と対応する固有空間の基底を求めよ。

(2) A を直交行列によって対角化せよ ($T^{-1}AT$ が対角行列となる直交行列 T を求め、そのときの $T^{-1}AT$ も答えよ。)

6. $\boldsymbol{u}_1 = (1,1,1,0,3)$, $\boldsymbol{u}_2 = (2,1,2,0,3)$, $\boldsymbol{u}_3 = (1,2,1,0,6)$ とし $U = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$ とする。また $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,1,1,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,1,1,1,4)$ $\boldsymbol{v}_3 = (2,1,2,2,5)$ とし $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ とする。[5 点 × 2]

(1) U の一組の基底を求めよ。

(2) (1) で求めた U の基底の延長となる $U + V$ の基底を求めよ。

7. A を実対称行列とし、λ, μ を A の相異なる固有値、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を対応する固有ベクトルとする。このとき $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交することを示せ。[5 点]

[5 点 × 12 = 60 点満点]