線形代数続論・筆答レポート (第二回 2018/07/26)

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ を求めよ。[5 点]

2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。[5 点]

3. $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 7 & -10 \end{pmatrix}$ とする。[5 点 × 2]
   (1) A の固有値を求め、各固有値に対してその固有空間の基底をそれぞれ求めよ。
   (2) A の Jordan 標準形と、$P^{-1}AP$ が Jordan 標準形となる正則行列 P を求めよ。

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。[5 点 × 2]
   (1) A の固有値を求め、各固有値に対してその固有空間の基底をそれぞれ求めよ。
   (2) A の Jordan 標準形と、$P^{-1}AP$ が Jordan 標準形となる正則行列 P を求めよ。

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 11 & 2 \end{pmatrix}$ とする。[5 点 × 2]
   (1) A の固有値を求め、各固有値に対してその固有空間の基底をそれぞれ求めよ。
   (2) A の Jordan 標準形と、$P^{-1}AP$ が Jordan 標準形となる正則行列 P を求めよ。

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。[5 点 × 2]
   (1) A の固有値を求め、各固有値に対してその固有空間の基底をそれぞれ求めよ。
   (2) A の Jordan 標準形と、$P^{-1}AP$ が Jordan 標準形となる正則行列 P を求めよ。

7. 4 次正方行列 A について、A の固有多項式は $f_A(x) = (x-\lambda)^3(x-\mu)$ で、A の最小多項式は $m_A(x) = (x-\lambda)^2(x-\mu)$ であるとする。ただし $\lambda \neq \mu$ である。このとき A の Jordan 標準形を求めよ。[5 点]

8. λ, μ を正方行列 A の相異なる固有値とする。λ, μ の広義固有空間 $V_\infty(\lambda), V_\infty(\mu)$ について $V_\infty(\lambda) \cap V_\infty(\mu) = \{\mathbf{0}\}$ であることを示せ。[5 点]

[5 点 × 12 = 60 点満点]

問 3, 4, 5, 6 では必要な解答が書いてあれば (1), (2) に分けて書かなくてもよい。