線形代数続論・筆答レポート (第一回 2019/06/21)

1. 次の連立方程式を解け。[5 点]

$$\begin{cases} 2a + b + c + d = -1 \\ 5a + 2b + c + 4d = 3 \\ 7a + 3b + 2c + 5d = 2 \\ 2a + 2b + 4c - 2d = -12 \end{cases}$$

2. 行列 $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 5 \\ 9 & -1 & 1 & -7 \\ 3 & 3 & 2 & -4 \\ 5 & -5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。[5 点]

3. 行列式 $\begin{vmatrix} 5 & -5 & 0 & -5 \\ -5 & 0 & 5 & 0 \\ 9 & -1 & -7 & 1 \\ 3 & 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ を求めよ。[5 点]

4. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ とする。[5 点 × 2]

   (1) A の固有値と対応する固有空間の基底を求めよ。

   (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求め、そのときの $P^{-1}AP$ も答えよ。

5. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とする。[5 点 × 2]

   (1) A の固有値と対応する固有空間の基底を求めよ。

   (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求め、そのときの $P^{-1}AP$ も答えよ。

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とする。[5 点 × 2]

   (1) A の固有値と対応する固有空間の基底を求めよ。

   (2) A を直交行列によって対角化せよ ($T^{-1}AT$ が対角行列となる直交行列 T を求め、そのときの $T^{-1}AT$ も答えよ。)

7. $\boldsymbol{u}_1 = (2.1, 0, -1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (0, 1, 1, -1)$, $\boldsymbol{u}_3 = (-1, 0, 2, 3)$ $\boldsymbol{u}_4 = (6, 1, -2, -1)$ とし $U = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$, $V = \langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4 \rangle$ とする。[5 点 × 2]

   (1) $U + V$ の基底を求めよ。

   (2) $U \cap V$ の基底を求めよ。

8. A を正方行列とし $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を A の相異なる固有値とする。$V(\lambda_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ を λ_i に対する固有空間とする。このとき $(V(\lambda_1) + V(\lambda_2)) \cap V(\lambda_3) = \{\boldsymbol{0}\}$ であることを示せ。[5 点]

[5 点 × 12 = 60 点満点]