

## 線形代数続論・筆答レポート (第二回 2019/07/25)

1. 次の連立方程式を解け。[5 点]

$$\begin{cases} a + 3b + 2c - 3d = 0 \\ a + 2b - c + d = 2 \\ 2a + b + c + 2d = -2 \\ 2a + 4b + c - d = 1 \end{cases}$$

2. 行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  の逆行列を求めよ。[5 点]

3. 行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  とする。[5 点 × 3]

- (1)  $A$  の固有値  $\lambda$  と対応する広義固有空間  $(V_1(\lambda), V_2(\lambda), \dots)$  の基底を求めよ。
- (2)  $P^{-1}AP$  が Jordan 標準形となる正則行列  $P$  を求め、そのときの  $P^{-1}AP$  も答えよ。
- (3) 自然数  $n$  に対して  $A^n$  を求めよ。

4. 行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  とする。[5 点 × 2]

- (1)  $A$  の固有値  $\lambda$  と対応する広義固有空間  $(V_1(\lambda), V_2(\lambda), \dots)$  の基底を求めよ。
- (2)  $P^{-1}AP$  が Jordan 標準形となる正則行列  $P$  を求め、そのときの  $P^{-1}AP$  も答えよ。

5. 行列  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  とする。[5 点 × 2]

- (1)  $A$  の固有値  $\lambda$  と対応する広義固有空間  $(V_1(\lambda), V_2(\lambda), \dots)$  の基底を求めよ。
- (2)  $P^{-1}AP$  が Jordan 標準形となる正則行列  $P$  を求め、そのときの  $P^{-1}AP$  も答えよ。

6. 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  とする。[5 点 × 2]

- (1)  $A$  の固有値  $\lambda$  と対応する固有空間の基底を求めよ。
- (2)  $T^{-1}AT$  が対称行列となる直交行列  $T$  を求め、そのときの  $T^{-1}AT$  も答えよ。

7. 6 次の行列  $A$  の最小多項式が  $(x-1)^2(x-2)^2$  であるとする。  $A$  の Jordan 標準形の可能性をすべて列挙せよ。[5 点]

8.  $N$  を  $\mathbb{C}$  上の  $n$  次正方行列とし、  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  とする。ある  $l$  があって  $N^{\ell-1}\mathbf{x} \neq 0$ ;  $N^\ell\mathbf{x} = 0$  であるとする。このとき  $\mathbf{x}, N\mathbf{x}, N^2\mathbf{x}, \dots, N^{\ell-1}\mathbf{x}$  は一次独立であることを示せ。[5 点]

[5 点 × 13 = 65 点満点]

---

問 3, 4, 5, 6 では必要な解答が書いてあれば (1), (2) などに分けて書かなくてもよい。