

線形代数続論・筆答レポート (第二回 2021/07/29 修正版)

特に指定がない場合は行列は複素数体上の行列であるとする。

1. 次の連立方程式の解を求めよ。[5 点]

$$\begin{cases} x - 2y - 2z + u = -11 \\ 2x + 3y - 2u = 10 \\ 10x + y - 8z - 2u = -14 \\ 4x - y - 4z = -12 \end{cases}$$

2. 次の行列の逆行列を求めよ。[5 点]

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。 $U^{-1}AU$ が対角行列となるユニタリ行列 U とそのときの $U^{-1}AU$ を求めよ。[5 点]

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。[5 点 × 2]

- (1) A の固有値を求め、各固有値に対してその固有空間の基底をそれぞれ求めよ。
(2) A の Jordan 標準形と、 $P^{-1}AP$ が Jordan 標準形となる正則行列 P を求めよ。

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ とする。[5 点 × 2]

- (1) A の固有値を求め、各固有値に対してその固有空間の基底をそれぞれ求めよ。
(2) A の Jordan 標準形と、 $P^{-1}AP$ が Jordan 標準形となる正則行列 P を求めよ。

6. $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & -3 \\ 6 & 7 & -6 & 6 \\ 5 & 5 & -4 & 5 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ とする。[5 点 × 2]

- (1) A の固有値を求め、各固有値に対してその固有空間の基底をそれぞれ求めよ。
(2) A の Jordan 標準形と、 $P^{-1}AP$ が Jordan 標準形となる正則行列 P を求めよ。

7. A を 8 次正方行列とし、その固有多項式は $(x-1)^4(x-2)^4$ で、最小多項式は $(x-1)^2(x-2)^3$ であるとする。 A の Jordan 標準形の可能性を列挙せよ。ただし Jordan ブロックの並べ替えで同じものは、同じであるとしてよい。[5 点]

8. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。自然数 n に対して A^n を求めよ。[5 点]

9. 実対称行列 A の異なる固有値 λ, μ に対する固有ベクトルは直交することを示せ。
[5 点]

[5 点 × 12 = 60 点満点]